

嘉兴市 2020~2021 学年第一学期期末检测

高一数学 参考答案 (2021.1)

一、选择题 I：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	D	A	C	B	D	C

二、选择题 II：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

题号	9	10	11	12
答案	CD	ACD	BD	AC

12.

【解析】因为 $f(-x) + f(x) = 0$ 所以 $f(-x) = -f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

$f(0) = 0$ ，当 $x > 0$ 时， $-x < 0$ ， $f(-x) = x^2 - 2ax + \frac{3}{2}a$ 所以

$$f(x) = -f(-x) = -x^2 + 2ax - \frac{3}{2}a, \text{ 综上 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + \frac{3}{2}a, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x^2 + 2ax - \frac{3}{2}a, & x > 0, \end{cases} \text{ 若 } x = 0 \text{ 是方程}$$

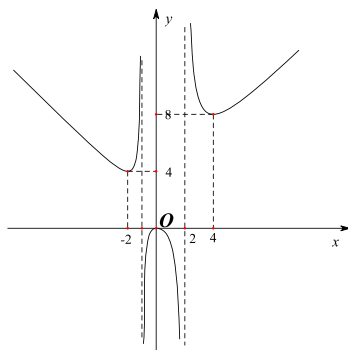
$$f(x) = ax + \frac{a}{2} \text{ 的一个根，则 } a = 0, \text{ 此时 } f(x) = ax + \frac{a}{2} \text{ 即 } f(x) = 0 \text{ 而 } f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$$

在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，当 $a = 0$ 时原方程有一个实根。当 $x < 0$ 时， $x^2 + 2ax + \frac{3}{2}a = ax + \frac{a}{2}$ ，所

以 $x^2 + ax + a = 0$ ，当 $x = -1$ 时不满足，所以 $a = -\frac{x^2}{x+1} = -(x+1) + \frac{1}{-(x+1)} + 2$ ，

当 $x > 0$ 时, $-x^2 + 2ax - \frac{3}{2}a = ax + \frac{a}{2}$, 所以 $x^2 - ax + 2a = 0$, 当 $x = 2$ 时不满足, 所以

$$a = \frac{x^2}{x-2} = x - 2 + \frac{4}{x-2} + 4, \text{ 如图}$$



若方程 $f(x) = ax + \frac{a}{2}$ 有两个不同的实数根, 则 $a < 0$ 或 $4 < a < 8$; 若方程 $f(x) = ax + \frac{a}{2}$ 有 4 个不同的实数根, 则 $a > 8$.

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

题号	13	14	15	16
答案	$-\pi$	4	1790	2

16.

【解析】 $f(x) = ax^2 + \frac{b}{2}x - \frac{a}{2} = a\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{x}{2}b \geq -\frac{1}{2}$, 令 $x^2 - \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$ 则 $x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = 1$, 故 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{4} - \frac{b}{4} \geq -\frac{1}{2}$ 得 $a + b \leq 2$, 当 $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{4}{3}$ 时 $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ 满足.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题 10 分) 已知全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$, 集合

$$B = \{x | x^2 - 2x - 2 > 0\}.$$

(I) 求 $\complement_{\mathbb{R}} A$, $A \cap B$;

(II) 若集合 $C = \{x | 3x + a > 0\}$, 满足 $A \cup C = C$, 求实数 a 的取值范围.

【解析】(I) $A = \{x | x^2 - 5x + 6 \leq 0\} = \{x | (x-2)(x-3) \leq 0\} = \{x | 2 \leq x \leq 3\}$,

所以 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x < 2 \text{ 或 } x > 3\}$ 3 分

$B = \{x | x^2 - 2x - 2 > 0\} = \{x | x < 1 - \sqrt{3} \text{ 或 } x > 1 + \sqrt{3}\}$, 因为 $2 < 1 + \sqrt{3} < 3$,

所以 $A \cap B = \{x | 1 + \sqrt{3} < x \leq 3\}$6 分

(II) 因为 $A \cup C = C$, 所以 $A \subseteq C$, $C = \{x | 3x + a > 0\} = \left\{x | x > -\frac{a}{3}\right\}$,

所以 $-\frac{a}{3} < 2$, 即 $a > -6$10 分

18. (本题 12 分) 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

(I) 求 $\sin 2\alpha$ 的值; (II) 求 $\cos 3\alpha$ 的值.

【解析】(I) 因为 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 所以 $\cos \alpha < 0$, $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{5}$ 6 分

(II) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha$

$= -\frac{3\sqrt{10}}{10} \times \frac{4}{5} - \frac{\sqrt{10}}{10} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{9\sqrt{10}}{50}$ 12 分

19. (本题 12 分) 第三届中国国际进口博览会于 2020 年 11 月 5 日至 10 日在上海国家会展中心举行, 多个国家和地区的参展企业携大批新产品、新技术、新服务首发首展. 某跨国公司带来了高端压缩机模型参展, 通过展会调研, 嘉兴某企业计划在 2021 年与该跨国公司合资生产此款压缩机. 生产此款压缩机预计全年需投入固定成本 1000 万元, 每生产 x

千台压缩机，需另投入资金 y 万元，且 $y = \begin{cases} 10x^2 + 299x, 0 < x < 40, \\ \frac{900x^2 - 9450x + 10000}{x}, x \geq 40, \end{cases}$ ，根据市场行

情，每台压缩机售价为 0.899 万元，且当年内生产的压缩机当年能全部销售完。

(I) 求 2021 年该企业年利润 z (万元) 关于年产量 x (千台) 的函数关系式；

(II) 2021 年产量为多少 (千台) 时，企业所获年利润最大？最大年利润是多少万元？

(注：利润=销售额-成本)

【解析】(I) $z = \begin{cases} 899x - (10x^2 + 299x) - 1000, 0 < x < 40 \\ 899x - \frac{900x^2 - 9450x + 10000}{x} - 1000, x \geq 40 \end{cases}$

$$= \begin{cases} -10x^2 + 600x - 1000, 0 < x < 40 \\ -\left(x + \frac{10000}{x}\right) + 8450, x \geq 40 \end{cases} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 由 (I) 知当 $0 < x < 40$ 时， $z = -10(x - 30)^2 + 8000$ ，当 $x = 30$ 时， $z_{\max} = 8000$ 万元；当 $x \geq 40$ 时， $z = -\left(x + \frac{10000}{x}\right) + 8450$ ，因为 $x + \frac{10000}{x} \geq 200$ ，当且仅当 $x = 100$ 时取等号，所以当 $x = 100$ 时， $z_{\max} = 8250$ 万元 > 8000 万元，綜上当 $x = 100$ 时， $z_{\max} = 8250$ 万元，所以 2021 年产量为 100 (千台) 时，企业所获年利润最大为 8250 万元.12 分

20. (本题 12 分) 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 \omega x - 2\sqrt{3} \sin \omega x \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 (\omega > 0)$ ，其最小正周期为 π 。

(I) 求 ω 的值及函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(II) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $y = g(x)$ ，求函数 $y = g(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{7\pi}{12}\right)$ 上的值域。

【解析】(I) 因为 $f(x) = 2\cos^2 \omega x - 2\sqrt{3} \sin \omega x \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 (\omega > 0)$

$$= 2\cos^2 \omega x - 1 - 2\sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x = \cos 2\omega x - \sqrt{3} \sin 2\omega x = 2 \left(\frac{1}{2} \cos 2\omega x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x \right)$$

$$= 2 \cos \left(2\omega x + \frac{\pi}{3} \right) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

所以 $T = \frac{2\pi}{|2\omega|} = \frac{\pi}{\omega} = \pi$, 即 $\omega = 1$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$f(x) = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right), \text{ 令 } 2k\pi - \pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 得 } k\pi - \frac{2\pi}{3} \leq x \leq k\pi - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi - \frac{2\pi}{3}, k\pi - \frac{\pi}{6} \right] (k \in \mathbb{Z})$. $\dots\dots\dots 8$

分

(II) $f(x) = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$ 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到 $g(x) = 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

当 $x \in \left(0, \frac{7\pi}{12} \right)$ 时, $-\frac{\pi}{3} < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6}$, 所以 $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$, $-\sqrt{3} < g(x) \leq 2$, 所

以函数 $y = g(x)$ 的值域为 $(-\sqrt{3}, 2]$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. (本题 12 分) 对于定义域为 D 的函数 $y = f(x)$, 若同时满足以下条件: ① $y = f(x)$ 在 D 上单调递增或单调递减; ② 存在区间 $[a, b] \subseteq D$, 使 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域是 $[a, b]$, 那么我们把函数 $y = f(x) (x \in D)$ 叫做闭函数.

(I) 判断函数 $g(x) = 3^x - 3x$ 是不是闭函数? 若是, 请找出区间 $[a, b]$; 若不是, 请说明理由;

(II) 若 $h(x) = \ln(e^{2x} + m)$ 为闭函数, 求实数 m 的取值范围 (e 为自然对数的底数).

【解析】因为 $g(x) = 3^x - 3x$, 所以 $g(-1) = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$, $g(1) = 0$, $g(2) = 3^2 - 3 \times 2 = 3$,
 $g(-1) > g(1)$, $g(1) < g(2)$,

所以 $g(x) = 3^x - 3x$ 不是单调函数故不是闭函数. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(II) $h(x) = \ln(e^{2x} + m)$ 在定义域上单调递增, 当 $x \in [a, b]$ 时, $y \in [a, b]$, 所以

$$\begin{cases} h(a) = \ln(e^{2a} + m) = a \\ h(b) = \ln(e^{2b} + m) = b \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} e^{2a} - e^a + m = 0 \\ e^{2b} - e^b + m = 0 \end{cases}$$

所以 a, b 是方程 $e^{2x} - e^x + m = 0$ 的两个根,8 分

令 $t = e^x \in (0, +\infty)$ 且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则方程 $t^2 - t + m = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的实

根, 因为 $m = -t^2 + t$, 令 $h(t) = -t^2 + t$ 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 单调递增, 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调递减, $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$,

所以 $m \in (0, \frac{1}{4})$12 分

22. (本题 12 分) 已知 $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = ax^2 + (2a - b)x$.

(I) 若函数 $y = f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有两个不同的零点, 求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围;

(II) 求证: 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $|f(x)| \leq |2a - b| + a$.

【解析】(I) $f(x) = ax^2 + (2a - b)x = 0$, 所以 $x_1 = 0$ 或 $x_2 = \frac{b - 2a}{a}$, 则 $\begin{cases} -1 \leq \frac{b - 2a}{a} \leq 1 \\ \frac{b - 2a}{a} \neq 0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} 1 \leq \frac{b}{a} \leq 3 \\ \frac{b}{a} \neq 2 \end{cases}$ 所以 $\frac{b}{a} \in [1, 2) \cup (2, 3]$3 分

(II) 法①先证 $f(x) \leq |2a - b| + a$,

因为 $f(x) = ax^2 + (2a - b)x$, 所以 $f(1) = 3a - b$, $f(-1) = -a + b$,

$f(1) - f(-1) = 4a - 2b$, 因为 $a > 0$,

所以 $f(x)_{\max} = \max\{f(1), f(-1)\} = \begin{cases} 3a - b, b \leq 2a \\ b - a, b > 2a \end{cases} = |2a - b| + a$,

即 $f(x) \leq |2a - b| + a$ 成立;6 分

下证 $f(x) \geq -|2a-b| - a$,

因为 $f(x) = ax^2 + (2a-b)x$, 对称轴为 $x = \frac{b-2a}{2a}$,

① $x = \frac{b-2a}{2a} \leq -1$ 即 $b \leq 0$ 时, $y = f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, 所以

$$f(x)_{\min} = f(-1) = -a + b,$$

$$f(x)_{\min} + |2a-b| + a = -a + b + 2a - b + a = 2a > 0;$$

② $x = \frac{b-2a}{2a} \geq 1$ 即 $b \geq 4a$ 时, $y = f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减, 所以

$$f(x)_{\min} = f(1) = 3a - b,$$

$$f(x)_{\min} + |2a-b| + a = 3a - b + b - 2a + a = 2a > 0;$$

③ $-1 < x = \frac{b-2a}{2a} < 1$ 即 $0 < b < 4a$ 时, $f(x)_{\min} = f\left(\frac{b-2a}{2a}\right) = \frac{-(2a-b)^2}{4a}$,

$$\text{所以 } f(x)_{\min} + |2a-b| + a = \frac{-(2a-b)^2}{4a} + |2a-b| + a = \begin{cases} \frac{8a^2 - b^2}{4a}, & 0 < b \leq 2a \\ \frac{-8a^2 + 8ab - b^2}{4a}, & 2a < b < 4a \end{cases},$$

当 $0 < b \leq 2a$ 时, $f(x)_{\min} + |2a-b| + a > 0$,

当 $2a < b < 4a$ 时, 令 $h(b) = -b^2 + 8ab - 8a^2$ 在 $(2a, 4a)$ 单调递增, 又因为 $h(2a) = 4a^2 > 0$,

所以 $f(x)_{\min} + |2a-b| + a > 0$

綜上当 $x \in [-1, 1]$ 时, $|f(x)| \leq |2a-b| + a$12 分

法②: 因为 $f(x) = ax^2 + (2a-b)x$, 所以 $f(1) = 3a - b$, $f(-1) = -a + b$,

得 $f(1) + f(-1) = 2a > 0$, 所以 $\max\{|f(-1)|, |f(1)|\} = \max\{f(-1), f(1)\}$,

$a = \frac{1}{2}f(-1) + \frac{1}{2}f(1)$, $b = \frac{3}{2}f(-1) + \frac{1}{2}f(1)$,6 分

$$\text{于是 } |f(x)| = \left| \frac{f(-1) + f(1)}{2} x^2 + \frac{f(1) - f(-1)}{2} x \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{x^2+x}{2} f(1) + \frac{x^2-x}{2} f(-1) \right| \leq \left| \frac{x^2+x}{2} f(1) \right| + \left| \frac{x^2-x}{2} f(-1) \right| \\
&= \left| \frac{x^2+x}{2} \right| |f(1)| + \left| \frac{x^2-x}{2} \right| |f(-1)| \leq \max\{|f(1)|, |f(-1)|\} \left(\left| \frac{x^2+x}{2} \right| + \left| \frac{x^2-x}{2} \right| \right)
\end{aligned}$$

由 $|a| + |b| = \max\{|a+b|, |a-b|\}$ 得 $\left| \frac{x^2+x}{2} \right| + \left| \frac{x^2-x}{2} \right| = \max\{x^2, |x|\} \leq 1$ ，所以

$$|f(x)| \leq \max\{|f(1)|, |f(-1)|\} = \max\{f(1), f(-1)\}$$

$$= \frac{f(1)+f(-1)}{2} + \frac{|f(1)-f(-1)|}{2} = |2a-b| + a. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

命题人：高玉良 邱东方 沈志荣