

2016 年杭州市高二年级教学质量检测

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 18 小题，每小题 3 分，共 54 分，在每个小题给出的四个选项中，有且只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答案	C	D	B	C	C	B	B	C	B
题号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
答案	A	C	B	B	B	A	C	C	A

二、填空题：本大题共 4 小题，共 16 分。

19. $x \geq 2$ 20. $2n-1$ 21. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 22. $2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$

三、解答题：本大题共 3 小题，共 30 分，要求写出详细的推证和运算过程

23. (本小题满分 10 分)

解：(I) 因为 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + 2$
 $= \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 2.$

所以 $T = \pi$4 分

(II) 由 (I) 知: $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 2$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $-\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$.

当 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)_{\max} = 3.$

所以 $A = \frac{\pi}{3}.$

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 得

$12 = b^2 + 16 - 4b,$

所以 $b = 2.$ 10 分

24. (本小题满分 10 分)

解：(I) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$ 4 分

(II) 由直线 $l: y = k(x-1)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 方程联立, 得

$(1+2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 4 = 0,$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}, x_1 x_2 = \frac{2k^2-4}{1+2k^2},$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \frac{k_1 k_2}{k} &= \frac{y_1 y_2}{k(x_1-3)(x_2-3)} = k \frac{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1}{x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9} \\ &= \frac{-3k}{5+8k^2} = \frac{3}{(-\frac{5}{k}) + (-8k)} \leq \frac{3}{4\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

当且仅当 $k = -\frac{\sqrt{10}}{4}$ 时, 等号成立,

所以直线 l 的方程为 $y = k(x-1)$ 10 分

25. (本小题满分 10 分)

解: (I) 因为 $f(x) = \begin{cases} (a+1)x - a + 3 & (x < a) \\ 2x^2 - (a+1)x + a + 3 & (x \geq a) \end{cases}$, 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$$\text{所以 } \begin{cases} a+1 > 0 \\ \frac{a+1}{4} \leq a \end{cases}, \text{ 解得 } a \geq \frac{1}{3}. \quad \text{.....4 分}$$

$$(II) \text{ 设 } h(x) = f(x) - 2x = \begin{cases} (a-1)x - a + 3 & (x < a) \\ 2x^2 - (a+3)x + a + 3 & (x \geq a) \end{cases},$$

(1) 当 $a > 1$ 且 $x < a$ 时, 当 $x < \frac{a-3}{a-1}$ 时, $h(x) < 0$, 不合题意, 舍去;

(2) 当 $a = 1$ 时, 满足题意;

(3) 当 $a < 1$ 时

① 若 $x < a$, $h(x)$ 递减, $h(x)_{\min} = a^2 - 2a + 3 > 0$, 所以 $h(x) \geq 0$ 恒成立;

② 若 $x \geq a$ 时, 因为 $a < \frac{a+3}{4}$,

$$\text{所以 } h(x)_{\min} = h\left(\frac{a+3}{4}\right) = -\frac{(a+3)^2}{8} + a + 3 \geq 0,$$

解之得, $-3 \leq a \leq 5$.

所以 $-3 \leq a < 1$.

综上, 得 $-3 \leq a \leq 1$10 分