

2016年杭州市第一次高考科目教学质量检测

高三数学检测试卷（文科）答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. D 2. B 3. D 4. A 5. D 6. A 7. B 8. B

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分.

9. 5 10. $1, (-4, \sqrt{3})$ 11. $(1,1), 2$ 12. $2,0$

13. $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}$ 14. -2 15. 10

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (本题满分 15 分)

证明 (1) 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

$$\text{得 } (1 + \sqrt{3})\sin C = 2\sin B,$$

$$\text{又因为 } 2\sin B = 2\sin\left(\frac{5\pi}{6} - C\right) = \cos C + \sqrt{3}\sin C,$$

$$\text{所以 } \sin C = \cos C, \text{ 即 } C = \frac{\pi}{4}; \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{\sqrt{2}}{2}ab, \text{ 所以 } ab = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3}).$$

$$\text{由正弦定理得 } \sqrt{2}a = c,$$

$$\text{由余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

$$\begin{aligned} \text{得 } c^2 &= a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab \\ &= \frac{1}{2}c^2 + \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{4}c^2 - 2(1 + \sqrt{3}) \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2}c^2 - 2(1 + \sqrt{3}), \end{aligned}$$

$$\text{解得 } c = 2,$$

$$\text{所以 } a = \sqrt{2}, b = 1 + \sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

17. (本题满分 15 分)

解: (I) 证明: 连接 AC 交 BE 于 O , 并连接 EC, FO ,

因为 $BC \parallel AD$, $BC = \frac{1}{2}AD$, E 为 AD 中点,

所以 $AE \parallel BC$, 且 $AE = BC$,

所以四边形 $ABCE$ 为平行四边形,

所以 O 为 AC 中点,

又因为 F 为 AD 中点,

所以 $OF \parallel PA$.

因为 OF 在平面 BEF 内, PA 不在平面 BEF 内,

所以 $PA \parallel$ 平面 BEF7 分

(II) 由 $BCDE$ 为正方形可得 $EC = \sqrt{2} BC = \sqrt{2}$,

由 $ABCE$ 为平行四边形, 可得 $EC \parallel AB$,

所以 $\angle PCE$ 为 PC 与 AB 所成角, 即 $\angle PCE = 45^\circ$,

因为 $PA = PD$, E 为 AD 重点,

所以 $PE \perp AD$.

因为侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 侧面 $PAD \cap$ 底面 $ABCD = AD$, PE 在平面 PAD 内,

所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $PE \perp EC$,

所以 $PE = EC = \sqrt{2}$8 分

18. (本题满分 15 分)

解: (I) 因为 $a_1 = \frac{1}{2}$, 且 $a_{n+1} - a_n = a_n^2 + 1 > 0$,

所以 $a_n > 0$,

由条件得: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_n + \frac{1}{a_n} + 1 \geq 3$7 分

(II) 由 (I) 得 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{3}$, 即 $\frac{1}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a_n}$,

所以 $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a_1} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{a_1}$,

$= \frac{1}{a_1} (1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}) = 3(1 - \frac{1}{3^n}) < 3$8 分

19. (本题满分 15 分)

解: (I) 设 $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(x, y)$, 则 $\overrightarrow{BA} = (a, -b)$, $\overrightarrow{AC} = (x-a, y)$.

所以 $\begin{cases} x-a=a \\ y=-b \end{cases}$, 消去 a, b , 得

点 C 的轨迹 Γ 为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$6 分

(II) 设直线 m 的方程为 $y = kx + b$, 有 $b = 2 - 2k$.

解得点 K 的横坐标 $x_K = \frac{2-4b}{1+4k}$,

将直线 m 代入椭圆方程得:

$(1+4k^2)x^2 + 8kbx + 4b^2 - 4 = 0$,

由韦达定理, 得 $x_E + x_F = \frac{-8kb}{1+4k^2}$, $x_E x_F = \frac{4b^2-4}{1+4k^2}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{|DK|}{|DE|} + \frac{|DK|}{|DF|} &= |x_D - x_k| \cdot \left(\frac{1}{|x_D - x_E|} + \frac{1}{|x_D - x_F|} \right) \\ &= \left| 2 - \frac{2-4b}{1+4k} \right| \cdot \frac{|4 - (x_F + x_E)|}{|4 - 2(x_F + x_E) + x_F x_E|} \\ &= \left| \frac{8k+4b}{1+4k} \right| \cdot \frac{|4k^2 + 2bk + 1|}{|4k^2 + 4bk + b^2|} \\ &= 2. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

20. (本题满分 14 分)

解: (1) 易求得当 $\frac{1}{9} < k < \frac{1}{3}$ 时, 方程 $f(x) = kx - \frac{2}{9}$ 有且仅有三个不同的实根.

其最大根为 t 的取值范围为 $\left(2, \frac{5+\sqrt{5}}{3} \right)$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 设函数 } h(x) = (x-1) \cdot |x-a| - 2x + \frac{1}{2}a = \begin{cases} x^2 - (a+3)x + \frac{3}{2}a, & (x \geq a) \\ -x^2 + (a-1)x - \frac{1}{2}a, & (x < a) \end{cases},$$

因为 $-1 < a < \frac{1}{5}$, 所以 $\frac{a-1}{2} < a < \frac{a+3}{2}$, 且注意到 $h(a) = -\frac{3}{2}a$.

$$(1) \text{ 当 } 0 < a < \frac{1}{5} \text{ 时, 因为 } \begin{cases} (a-1)^2 - 4 \times \frac{1}{2}a > 0 \\ h(a) = -\frac{3}{2}a < 0 \end{cases},$$

所以 $x_1 + x_2 + x_3 = (a-1) + \frac{a+3+\sqrt{a^2+9}}{2} = \frac{1}{2}(3a+1+\sqrt{a^2+9})$ 在 $a \in (0, \frac{1}{5})$ 单调递增,

故 $x_1 + x_2 + x_3 \in (2, \frac{8+\sqrt{226}}{10})$.

$$(2) \text{ 当 } -1 < a \leq 0 \text{ 时, 因为 } \begin{cases} (a+3)^2 - 4 \times \frac{3}{2}a > 0 \\ h(a) = -\frac{3}{2}a \geq 0 \end{cases},$$

所以 $x_1 + x_2 + x_3 = (a+3) + \frac{a-1-\sqrt{a^2-4a+1}}{2} = \frac{1}{2}(3a+5-\sqrt{(a-2)^2-3})$ 在 $a \in (-1, 0]$

单调递增,

故 $x_1 + x_2 + x_3 \in (\frac{2-\sqrt{6}}{2}, 2]$,

综上, $x_1 + x_2 + x_3 \in (\frac{2-\sqrt{6}}{2}, \frac{8+\sqrt{226}}{10})$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$