

2015 学年第二学期高三调测试卷

数学（理）参考答案及评分标准

一、选择题（本大题共有 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	C	B	A	A	D	B

二、填空题（本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分）

9. -3 , $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$

10. 2 ; $x \geq 1$ 或 $x \leq -4$

11. π , $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

12. 6 , $16+2\sqrt{5}$

13. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

14. $[1, 3]$

15. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

三、解答题（本大题共 5 小题，共 74 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

16.（本题满分 15 分）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .

已知 $a^2 + b^2 + 5ab \cos C = 0$, $\sin^2 C = \frac{7}{2} \sin A \sin B$.

（I）求角 C 的大小；

（II）若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\sin A$ 的值.

解：（I）由题意及余弦定理得， $a^2 + b^2 + 5ab \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0$,

即 $7(a^2 + b^2) = 5c^2$. -----2 分

由题意及正弦定理得， $c^2 = \frac{7}{2} ab$. -----4 分

故 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-\frac{2}{7}c^2}{2ab} = -\frac{1}{2}$, -----6 分

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\angle C = \frac{2\pi}{3}$. -----7 分

(II) 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $ab = 2$ ①-----9 分

由 (I) 知, $c^2 = 7$, $a^2 + b^2 = 5$ ②-----11 分

联立①②得 $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$. -----13 分

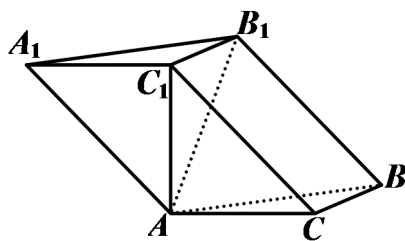
由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 得, $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{14}$ 或 $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{7}$. -----15 分

17. (本题满分 15 分) 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC_1 \perp$ 平面 ABC ,

$BC = CA = AC_1$.

(I) 求证: $AC \perp$ 平面 AB_1C_1 ;

(II) 求二面角 A_1-BB_1-C 的余弦值.



第 17 题图

(I) 证明: 因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$,

所以 $BC \parallel B_1C_1$.

又因为 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $AC \perp B_1C_1$, -----3 分

因为 $AC_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $AC_1 \perp AC$, -----6 分

因为 $AC_1 \cap B_1C_1 = C_1$, 所以 $AC \perp$ 平面 AB_1C_1 . -----7 分

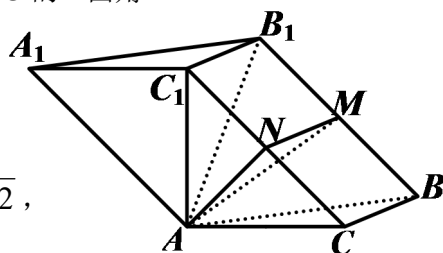
(II) 解: 方法一

因为点 A_1 在平面 A_1ABB_1 内, 故只需求 $A-BB_1-C$ 的二面角.

分别取 BB_1 , CC_1 的中点 M 、 N ,

连结 AM , MN , AN ,

设 $BC = CA = AC_1 = 1$, 则 $AB = AB_1 = BB_1 = \sqrt{2}$,



因为 $AB_1 = \sqrt{B_1C_1^2 + AC_1^2} = \sqrt{2} = AB$ ，所以 $AM \perp BB_1$ 。

因为 $AC_1 \perp$ 平面 ABC ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

所以 $BC \perp CC_1$ ，即平行四边形 BCC_1B_1 为矩形，

所以 $MN \perp BB_1$ ，所以 $\angle AMN$ 为二面角 $A-BB_1-C$ 的平面角。-----11 分

由已知得， $AM = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $MN = 1$ ， $AN = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

由余弦定理得， $\cos \angle AMN = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，所以二面角 A_1-BB_1-C 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

-----15 分

方法二

如图所示，以 A 为原点，分别以直线 AC 为 x 轴，底面内垂直 AC 的直线为 y 轴，

直线 AC_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系。

设 $BC = CA = AC_1 = 1$ ，由题意知各点坐标如下： $B(1,1,0)$ ， $C(1,0,0)$ ， $B_1(0,1,1)$ 。

因此， $\overrightarrow{AB} = (1,1,0)$ ，

$\overrightarrow{AB_1} = (0,1,1)$ ， $\overrightarrow{CB} = (0,1,0)$ ， $\overrightarrow{CB_1} = (-1,1,1)$ ，

-----9 分

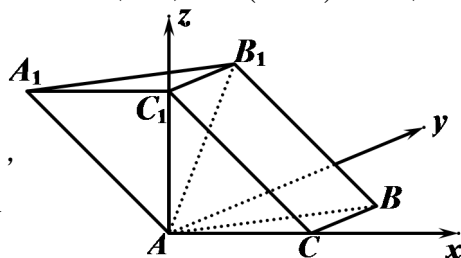
设平面 A_1B_1BA 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ，

平面 BB_1C 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x_1 + y_1 = 0 \\ y_1 + z_1 = 0 \end{cases},$$

可取 $\vec{m} = (1, -1, 1)$ ，-----11 分

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CB_1} = 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y_2 = 0 \\ -x_2 + y_2 + z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 可取 } \vec{n} = (1, 0, 1), \text{ -----13 分}$$



于是 $\left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, -----15 分

由题意知, 所求二面角的平面角为锐角, 故二面角 $A_1 - BB_1 - C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

18. (本题满分 15 分) 已知点 $C(x_0, y_0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上的动点, 以 C 为圆心的圆

过点 $F(1, 0)$.

(I) 若圆 C 与 y 轴相切, 求实数 x_0 的值;

(II) 若圆 C 与 y 轴交于 A, B 两点, 求 $|FA| \cdot |FB|$ 的取值范围.

解: (I) 当圆 C 与 y 轴相切时, $|x_0| = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2}$,
-----2 分

又因为点 C 在椭圆上, 所以 $\frac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 1$, -----3 分

解得, $x_0 = -2 \pm 2\sqrt{2}$, -----5 分

因为 $-\sqrt{2} \leq x_0 \leq \sqrt{2}$, 所以 $x_0 = -2 + 2\sqrt{2}$; -----6 分

(II) 圆 C 的方程是 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x_0 - 1)^2 + y_0^2$,

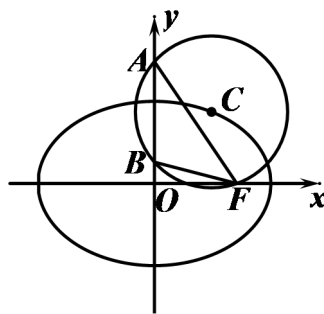
令 $x = 0$, $y^2 - 2y_0y + 2x_0 - 1 = 0$,

设 $A(0, y_1), B(0, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 2y_0$, $y_1 \cdot y_2 = 2x_0 - 1$, -----8 分

由 $\Delta = 4y_0^2 - 4(2x_0 - 1) > 0$, 及 $y_0^2 = 1 - \frac{1}{2}x_0^2$ 得 $-2 - 2\sqrt{2} < x_0 < -2 + 2\sqrt{2}$,

又由点 C 在椭圆上, $-\sqrt{2} \leq x_0 \leq \sqrt{2}$, 所以 $-\sqrt{2} \leq x_0 < -2 + 2\sqrt{2}$, -----10 分

$|FA| \cdot |FB| = \sqrt{y_1^2 + 1} \cdot \sqrt{y_2^2 + 1} = \sqrt{(y_1 y_2)^2 + (y_1^2 + y_2^2) + 1}$, -----12 分



第 18 题图

$$= \sqrt{(2x_0-1)^2 + 4y_0^2 - 2(2x_0-1) + 1} = \sqrt{2x_0^2 - 8x_0 + 8} = \sqrt{2}(2-x_0), \text{---14 分}$$

$$\text{所以 } |FA| \cdot |FB| \in (4\sqrt{2} - 4, 2 + 2\sqrt{2}]. \text{-----15 分}$$

19. (本题满分 15 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + 3|x-a|$ ($a \in \mathbb{R}$).

(I) 若 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值和最小值分别记为 $M(a)$, $m(a)$, 求 $M(a) - m(a)$;

(II) 设 $b \in \mathbb{R}$, 若 $|f(x) + b| \leq 3$ 对 $x \in [-1, 1]$ 恒成立, 求 $3a + b$ 的取值范围.

$$\text{解: (I) } f(x) = x^2 + 3|x-a| = \begin{cases} x^2 - 3x + 3a, & x < a, \\ x^2 + 3x - 3a, & x \geq a, \end{cases}$$

① 当 $a \geq 1$ 时, $f(x) = x^2 - 3x + 3a$ 在 $x \in [-1, 1]$ 单调递减, 则 $M(a) = f(-1) = 4 + 3a$,

$$m(a) = f(1) = -2 + 3a, \text{ 此时 } M(a) - m(a) = 6; \text{-----2 分}$$

② 当 $a \leq -1$ 时, $f(x) = x^2 + 3x - 3a$ 在 $x \in [-1, 1]$ 单调递增, 则 $M(a) = f(1) = 4 - 3a$,

$$m(a) = f(-1) = -2 - 3a, \text{ 此时 } M(a) - m(a) = 6; \text{-----4 分}$$

③ 当 $-1 < a < 1$ 时, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3a, & -1 \leq x < a, \\ x^2 + 3x - 3a, & a \leq x \leq 1, \end{cases}$ 此时 $f(x)$ 在 $x \in [-1, a]$ 单调递减,

在 $x \in [a, 1]$ 单调递增, -----6 分

则 $m(a) = f(a) = a^2$, $M(a) = \max\{f(-1), f(1)\} = \max\{4 + 3a, 4 - 3a\} = 4 + |3a|$, 此

时 $M(a) - m(a) = 4 + |3a| - a^2$;

$$\text{因此 } M(a) - m(a) = \begin{cases} 6, & a \leq -1, \\ 4 + |3a| - a^2, & -1 < a < 1, \\ 6, & a \geq 1. \end{cases} \text{-----8 分}$$

(II) 原问题等价于 $-3 - b \leq f(x) \leq 3 - b$ 对 $x \in [-1, 1]$ 恒成立, 由 (I) 知

① 当 $a \geq 1$ 时, 则 $\begin{cases} 4 + 3a \leq -b + 3 \\ -2 + 3a \geq -b - 3 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 3a + b \leq -1 \\ 3a + b \geq -1 \end{cases}$, 此时 $3a + b = -1$; -----10 分

②当 $a \leq -1$ 时, 则 $\begin{cases} 4-3a \leq -b+3 \\ -2-3a \geq -b-3 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} b-3a \leq -1 \\ b-3a \geq -1 \end{cases}$,

此时 $b-3a=-1$, 此时 $3a+b \leq -7$; -----12 分

③当 $-1 < a < 1$ 时, 则 $m(a) = f(a) = a^2$, $\begin{cases} 4+|3a| \leq -b+3 \\ a^2 \geq -b-3 \end{cases}$, 即 $-a^2-3 \leq b \leq -|3a|-1$,

此时 $-a^2+3a-3 \leq 3a+b \leq 3a-|3a|-1$; -----14 分

由 $-1 < a < 1$ 得 $-a^2+3a-3 > -7$ 和 $3a-|3a|-1 \leq -1$, 此时 $-7 < 3a+b \leq -1$.

综上所述, $3a+b \leq -1$. -----15 分

20. (本题满分 14 分) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = a$ ($a \in \mathbb{R}$), $a_{n+1} = \frac{2a_n^2}{4a_n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(I) 若对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_{n+1} > \frac{1}{2}$, 求实数 a 的取值范围;

(II) 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n . 若 $a=1$, 求证: $S_n < \frac{n^2}{4} + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

解: (I) $a_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{(2a_n-1)^2}{2(4a_n-1)}$, -----2 分

当 $a_{n+1} > \frac{1}{2}$ 时, $a_n > \frac{1}{4}$, 且 $a_n \neq \frac{1}{2}$, -----4 分

反之, 当 $a_n > \frac{1}{4}$, 且 $a_n \neq \frac{1}{2}$ 时, $a_{n+1} > \frac{1}{2}$, -----5 分

故 $a > \frac{1}{4}$, 且 $a \neq \frac{1}{2}$. -----6 分

(II) 由 (I) 知, $a=1$ 时, $a_n > \frac{1}{2}$, 从而 $a_n > 0$,

所以 $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - 2a_n^2}{4a_n - 1} = \frac{a_n(1-2a_n)}{4a_n - 1} < 0$,

所以 $\frac{1}{2} < a_n \leq 1$. -----8 分

由 $a_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{(2a_n - 1)^2}{2(4a_n - 1)}$ 得: $\frac{a_{n+1} - \frac{1}{2}}{a_n - \frac{1}{2}} = \frac{2a_n - 1}{4a_n - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8a_n - 2}$, -----10 分

由 $\frac{1}{2} < a_n \leq 1$, 得 $\frac{1}{2} - \frac{1}{8a_n - 2} \leq \frac{1}{3}$,

即 $a_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3} \left(a_n - \frac{1}{2} \right)$. -----12 分

$$\left(a_1 - \frac{1}{2} \right) + \left(a_2 - \frac{1}{2} \right) + \cdots + \left(a_n - \frac{1}{2} \right) \leq$$

$$\left(a_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(a_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3^2} \left(a_1 - \frac{1}{2} \right) + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} \left(a_1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\left(a_1 - \frac{1}{2} \right)}{1 - \frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) < \frac{3}{4},$$

所以 $S_n < \frac{n}{2} + \frac{3}{4}$. -----13 分

又 $\frac{n^2}{4} + 1 - \left(\frac{n}{2} + \frac{3}{4} \right) = \frac{n^2 - 2n + 1}{4} \geq 0$,

所以 $S_n < \frac{n^2}{4} + 1 (n \in N^*)$. -----14 分