2018学年第二学期浙江省名校协作体参考答案

高三年级数学学科

首命题：金华一中　　次命题兼审校：衢州二中　　审核：长兴中学

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	C	A	B	D	D	D	B	A

二、填空题

11．-3，　3；　12．$\pm\sqrt{3}$，　2；　13．$\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$　，　$18+6\sqrt{3}$；　14．3，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$；

15．150；　16．$\left[0,3\sqrt{5}-6\right]$；　17．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$；

三、解答题

18．解：（1）由正弦定理得：$b^2+c^2-\sqrt{2}bc=a^2$-------------------------2 分

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $A=\dfrac{\pi}{4}$-------------------------------7 分

（2）$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=1$，从而 $bc=2\sqrt{2}$---9 分

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-4\geq 4\sqrt{2}-4$----------------------------------12 分

故 $a_{\min}=2\sqrt{\sqrt{2}-1}$--14 分

19．证明：（1）连结 AC，交 BD 于点 O，则 $\dfrac{BM}{BP}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{BN}{BO}$

$\therefore MN//PO$--2 分

从而 $MN//$面 PAC--3 分

（2）连结 PO，PN

$\because PA=PC$，O 是 AC 中点

$\therefore PO\perp AC$，又 $PA=PC=5$，$AO=2$

$\therefore PO=\sqrt{21}=PB$，$\therefore PN\perp BD$------------------------------------5 分

且易求 $PN=3\sqrt{2}$，$NC=\sqrt{7}$

$\therefore PN^2+NC^2=PC^2$，从而 $PN\perp NC$------------------------------------7 分

又 $BD\cap NC=N$

$\therefore PN\perp$平面$ABCD$--8 分

（3）方法一：

设$d_{N-PCD}=h$，PN与平面PCD所成角为θ，则$\sin\theta=\dfrac{h}{PN}$----------------------10 分

$\because V_{N-PCD}=V_{P-NCD}$---12 分

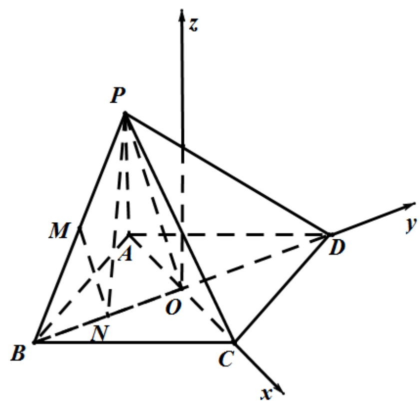
$\therefore S_{\Delta PCD}\cdot h=S_{\Delta NCD}\cdot PN$，计算可得$S_{\Delta NCD}=3\sqrt{3}$，$PD=3\sqrt{5}$，

$\therefore S_{\Delta PCD}=3\sqrt{11}$，又$\because PN=3\sqrt{2}$

$\therefore h=\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{11}}$，从而$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{33}}{11}$---15 分

方法二：

如图，建立空间直角坐标系，则$B(0,-2\sqrt{3},0)$，$C(2,0,0)$，$D(0,2\sqrt{3},0)$，$N(0,-\sqrt{3},0)$



设$P(x_0,y_0,z_0)$

则$\begin{cases}(x_0+2)^2+{y_0}^2+{z_0}^2=25\\(x_0-2)^2+{y_0}^2+{z_0}^2=25\\{x_0}^2+(y_0+2\sqrt{3})^2+{z_0}^2=21\end{cases}$ 得$\begin{cases}x_0=0\\y_0=-\sqrt{3}\\z_0=3\sqrt{2}\end{cases}$

$\therefore P(0,-\sqrt{3},3\sqrt{2})$--10 分

设平面PCD的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$，$\begin{cases}-2x+2\sqrt{3}y=0\\2x+\sqrt{3}y-3\sqrt{2}z=0\end{cases}$ 令$y=1$，得$\begin{cases}x=\sqrt{3}\\z=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\end{cases}$

$\therefore \vec{n}=(\sqrt{3},1,\dfrac{\sqrt{6}}{2})$---12 分

记直线PN与平面PCD所成角为θ，则$\sin\theta=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PN}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{PN}\right|}=\dfrac{\sqrt{33}}{11}$------------15 分

（用其它方法解答，酌情给分！）

20．解：（1）$\begin{cases}a_{n+1}^2=2S_{n+1}+2S_n\\a_n^2=2S_n+2S_{n-1}(n\geq 2)\end{cases}$

$\therefore a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2(a_{n+1} + a_n)$ --2 分

$\because a_n > 0$，$\therefore a_{n+1} - a_n = 2\ (n \geq 2)$ --4 分

令 $n = 1$，则求得 $a_2 = 4$，$\therefore a_2 - a_1 = 2$

$\therefore a_{n+1} - a_n = 2\ (n \in N^*)$ --5 分

故 $a_n = 2n$ --7 分

（2）$b_n = \dfrac{3}{4n^2}, T_1 = b_1 = \dfrac{3}{4} < \dfrac{5}{4}$；

当 $n \geq 2$ 时 $b_n = \dfrac{3}{4n^2} < \dfrac{3}{4n^2 - 1} = \dfrac{3}{(2n+1)(2n-1)} = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$---------11 分

$\therefore T_n = \dfrac{3}{4} + b_2 + b_3 + ... + b_n < \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{2}\left[\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right) + \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)\right]$--------13 分

$$= \frac{5}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{5}{4}$$

即 $T_n < \dfrac{5}{4}$ ---15 分

21．解：（1）$2c = 2 \Rightarrow c = 1$，$\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \sqrt{3} \Rightarrow b = \sqrt{2} \Rightarrow C: \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$------3 分

（2）设直线 $l: x = ty + 1$

联立 $\begin{cases} x = ty + 1 \\ 2x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow (2t^2 + 3)y^2 + 4ty - 4 = 0$，

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $y_1 + y_2 = \dfrac{-4t}{2t^2 + 3}$，$y_1 \cdot y_2 = \dfrac{-4}{2t^2 + 3}$ -----------------5 分

又 $\dfrac{y_1}{y_2} = -2 \Rightarrow \dfrac{y_1}{y_2} + \dfrac{y_2}{y_1} = -\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{(y_1 + y_2)^2}{y_1 y_2} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow t^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ---8 分

故直线 $l: \sqrt{2}x \pm y - \sqrt{2} = 0$ --9 分

（3）当直线l斜率为 0 时，则$k_1=-k_2$，易求两点坐标分别为（$\frac{\sqrt{6}}{2},1$）（-$\frac{\sqrt{6}}{2},1$）

或（$\frac{\sqrt{6}}{2},-1$）（-$\frac{\sqrt{6}}{2},-1$），此时$S_{\Delta AOB}=\frac{\sqrt{6}}{2}$------------------------------10 分

当直线l斜率不为 0 时，设直线$l:x=ty+m$

联立$\begin{cases}x=ty+m\\2x^2+3y^2=6\end{cases}\Rightarrow\left(2t^2+3\right)y^2+4tmy+2m^2-6=0$

则$y_1+y_2=\frac{-4tm}{2t^2+3}$，$y_1\cdot y_2=\frac{2m^2-6}{2t^2+3}$

$\because k_1k_2=-\frac{2}{3}\Rightarrow 3y_1y_2+2x_1x_2=0$，

又$x_1x_2=t^2y_1y_2+m^2+tm(y_1+y_2)$

$\therefore(2t^2+3)y_1y_2+2tm(y_1+y_2)+2m^2=0$，得$2t^2+3=2m^2$------------------------13 分

从而$\Delta=16t^2m^2-4(2t^2+3)(2m^2-6)=24m^2$

$\therefore S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|m||y_1-y_2|=\frac{1}{2}|m|\frac{2\sqrt{6}|m|}{2t^2+3}=\frac{\sqrt{6}m^2}{2m^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$------------------------------15 分

21．解：（1）$f'(x)=\frac{x-a}{x^2}(x>0)\Rightarrow a>0$---3 分

（2）$f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$,由$f'(x_1)=f'(x_2)$得$\frac{x_1-1}{x_1^2}=\frac{x_2-1}{x_2^2}$，即$x_1+x_2=x_1x_2$.------5 分

因为$x_1,x_2>0$,且$x_1\neq x_2$，所以$x_1x_2=x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}$，得$x_1x_2>4$.--------7 分

则$f(x_1)+f(x_2)=\ln x_1+\frac{1}{x_1}+\ln x_2+\frac{1}{x_2}=\ln x_1x_2+1>\ln 4+1=2\ln 2+1$.----8 分

（3）$f(x)=\ln x+\frac{a}{x}=0$

即$-a=x\ln x$，令$g(x)=x\ln x$，则$g'(x)=\ln x+1$

则函数$g(x)=x\ln x$在$(0,\frac{1}{e})$单调递减,$(\frac{1}{e},+\infty)$单调递增，$g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.-------10 分

令$x=e^{-t}$，其中$t>0$，则$g(x)=e^{-t}\ln e^{-t}=-\frac{t}{e^t}$，

$\because e^{t}>1+t+\dfrac{t^{2}}{2}$，$\therefore \dfrac{t}{e^{t}}<\dfrac{t}{1+t+\dfrac{t^{2}}{2}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{t}+1+\dfrac{t}{2}}$

当 $t\to+\infty$ 时，$\dfrac{t}{e^{t}}\to 0^{+}$，故 $-\dfrac{t}{e^{t}}\to 0^{-}$

从而当 $-a\in\left(-\dfrac{1}{e},0\right)$ 时有两个零点--11 分

不妨设 $0<x_1<\dfrac{1}{e}<x_2$，若 $x_2\ge\dfrac{2}{e}$，则结论成立；

若 $x_2<\dfrac{2}{e}$，即 $x_2\in\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{2}{e}\right)$ 时

令 $h(x)=g(x)-g\left(\dfrac{2}{e}-x\right)=x\ln x-\left(\dfrac{2}{e}-x\right)\ln\left(\dfrac{2}{e}-x\right)$，$x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$

则 $h'(x)=\ln x+\ln\left(\dfrac{2}{e}-x\right)+2$，从而 $h''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{-1}{\dfrac{2}{e}-x}=\dfrac{2\left(\dfrac{1}{e}-x\right)}{\left(\dfrac{2}{e}-x\right)x}>0$

$\therefore h'(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上单调递增，$h'(x)<h'\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$

$\therefore h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上单调递减---14 分

$\therefore h(x)>h\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$，即 $g(x)>g\left(\dfrac{2}{e}-x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上恒成立

$\therefore g(x_2)=g(x_1)>g\left(\dfrac{2}{e}-x_1\right)$

$\because x_2\in\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{2}{e}\right)$，$\dfrac{2}{e}-x_1\in\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{2}{e}\right)$

而 $g(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{2}{e}\right)$ 上单调递增

$\therefore x_2>\dfrac{2}{e}-x_1$，即 $x_1+x_2>\dfrac{2}{e}$ --15 分