

2015 年杭州市第一次高考科目教学质量检测

数学（理科）参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	B	A	C	A	D	D

二、填空题：本大题共 7 小题，第 9 至 12 题每小题 6 分，第 13 至 15 题每题 4 分，共 36 分.

9. $\pi, -\sqrt{2}, (k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12})$ 10. $2 - \frac{(k+1)^2}{4}; k \leq 2\sqrt{2} - 1$

11. $y=2x-1; -\frac{3}{2}$ 12. 1; 2 13. $(-\infty, -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$

14. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 15. $(1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (本题满分 15 分)

解：(I) 根据倍角公式： $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ，得

$$2\cos^2 A + \frac{1}{2} = 2\cos A, \text{ 即 } 4\cos^2 A - 2\cos A + 1 = 0,$$

$$\text{所以 } (2\cos A - 1)^2 = 0, \text{ 所以 } \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{3}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 根据正弦定理: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 得 } b = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin B, c = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin C,$$

$$\text{所以 } l = 1 + b + c = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} (\sin B + \sin C).$$

$$\text{因为 } A = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } B + C = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{所以 } l = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} [\sin B + \sin(\frac{2\pi}{3} - B)] = 1 + 2\sin(B + \frac{\pi}{6}).$$

$$\text{因为 } 0 < B < \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } l \in (2, 3]. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

17. (本题满分 15 分)

解析：(I) (i) 因为点 B_1 在平面 $ABCD$ 上射影为 O .

所以平面 $AB_1D \perp$ 平面 ACD ，又 $CD \perp AD$ ，

所以 $CD \perp$ 平面 AB_1D ，

所以 $AB_1 \perp CD$ ，

又因为 $AB_1 \perp CB_1$,
所以 $AB_1 \perp$ 平面 B_1CD .

(ii) 做矩形 $ABMN$, 使得 B_1 在 MN 上, 设 $AB=x$, $BC=y$, 则 $NB_1 = \sqrt{x^2 - 1}$,
由于 $AB_1 \perp B_1D$, 所以 $\triangle ANB_1 \sim \triangle B_1MD$,

$$\text{所以 } B_1D = \frac{MD}{B_1N} \times AB_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$\text{所以 } y = B_1C = \sqrt{CD^2 + B_1D^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{x^2 - 1}}$$

$$= \sqrt{x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 - 1}} + 2$$

$$\geq \sqrt{2\sqrt{(x^2 - 1) \cdot \frac{1}{x^2 - 1}}} + 2 = 2.$$

当且仅当 $x^2 - 1 = \frac{1}{x^2 - 1}$ 时, 即 $x = \sqrt{2}$ 取得等号.

故当 $x = \sqrt{2}$ 时, y 有最小值 2, 所以 $k = \sqrt{2}$.

(II) 作 $BF \perp AC$ 交 AC 于 E , 交 AD 于 F ,

要使点 O 恰好落在 $\triangle ACD$ 的内部, 即点 O 恰好落线段 EF 上,

由于 $B_1E \perp AC$, $EF \perp AC$,

所以 $\angle B_1EF$ 为二面角 B_1-AC-D 的平面角,

$$\cos \angle B_1EF = \frac{EO}{B_1E} \in (0, \frac{1}{2}).$$

即二面角 B_1-AC-D 的平面角的范围是 $(60^\circ, 90^\circ)$.

18. (本题满分 15 分)

解: (I) 设 $C(x, y)$, 则 $G(\frac{x}{3}, \frac{y}{3})$, $Q(0, \frac{y}{3})$, 根据 $|QA| = |QC|$, 得 $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ ($y \neq 0$);

..... 6 分

(II) 当直线 EF 的斜率不存在时, $t = 2$.

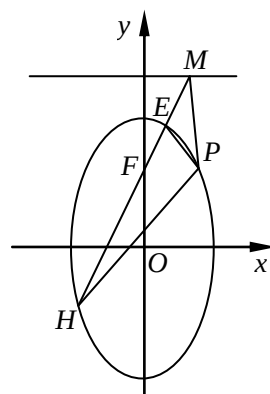
设直线 EF 的斜率为 k , 则直线 EH 的方程为 $y = kx + \sqrt{2}$, 点 M 坐标为 $(\frac{\sqrt{2}}{2k}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$.

把直线方程代入椭圆方程 $3x^2 + y^2 = 3$ 并整理, 得

$$(k^2 + 3)x^2 + 2\sqrt{2}kx - 1 = 0,$$

设 $E(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$, $P(a, \sqrt{2})$ ($a \neq 0$) 则有

$$x_1 + x_2 = -\frac{2\sqrt{2}k}{k^2 + 3}, \quad x_1x_2 = -\frac{1}{k^2 + 3},$$



$$\text{所以 } \frac{1}{k_1} = \frac{x_1 - a}{y_1 - \sqrt{2}} = \frac{x_1 - a}{kx_1}, \quad \frac{1}{k_2} = \frac{x_2 - a}{kx_2}, \quad \frac{1}{k_3} = \frac{1}{k} - \sqrt{2}a.$$

$$\text{又因为 } \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{x_1 - a}{kx_1} + \frac{x_2 - a}{kx_2} = \frac{2}{k} - 2\sqrt{2}a.$$

故存在常数 $t=2$ 符合题意. 15 分

19. (本题满分 15 分)

解: (I) 易知 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_1 - 1 = -\frac{1}{2}$,

因为 $S_n + a_n = n$, 及 $S_{n-1} + a_{n-1} = n-1$,

两式相减, 得 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$, 即 $a_n - 1 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 1)$.

$$\text{所以 } a_n - 1 = (a_1 - 1) \left\{ \frac{1}{2} \right\}^{n-1} = -\frac{1}{2^n},$$

所以 $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ 8 分

(II) 因为 $\frac{1}{2^n - 1} \leq \frac{2}{2^n}$, 则

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k a_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k - 1} < \sum_{k=1}^n \frac{2}{2^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 2. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

20. (本题满分 14 分)

(I) 由题知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 递增, $(0, \frac{a}{2})$ 递减, $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 递增,

又因为函数 $f(x)$ 在区间 $(-b, b)$ ($b > 0$) 存在最小值, 则

$$\begin{cases} b > \frac{a}{2}, \\ f(-b) \geq f\left(\frac{a}{2}\right). \end{cases}$$

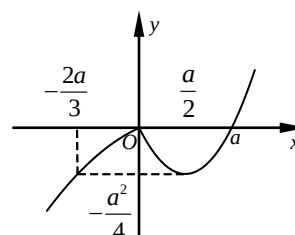
解得 $\frac{a}{2} < b \leq \frac{2a}{3}$ 6 分

(II) 可知函数 $f(x)$ 的图像如图所示, 所以:

① 当 $n \leq 0$ 时, 函数在 (m, n) 递增, 则

$$\begin{cases} f(m) = m, \\ f(n) = n. \end{cases}$$

即 $f(x) = x$ 在 $(-\infty, 0]$ 有两个不同的解.



因为 $-\frac{9}{40}x(x-a)=x$, 所以 $x=0$ 或 $x=a-\frac{40}{9}$,

所以当 $0<a<\frac{40}{9}$ 时, 存在区间 $[a-\frac{40}{9}, 0]$.

② 当 $m\geq 0$ 时, 因 $f(x)\in[m, n]$, 所以 $f(x)\geq 0$, 则 $m\geq a$, 即函数在 $[m, n]$ 递增, 则

$$\begin{cases} f(m)=m, \\ f(n)=n. \end{cases}$$

即 $f(x)=x$ 在 $[a, +\infty)$ 有两个不同的解, $x(x-a)=x$ 显然不可能.

③ 当 $m<0, n>0$ 时, 有两种可能:

$$(1) \begin{cases} f(m)=m \\ f(m)\leq f\left(\frac{a}{2}\right) \\ f(n)=n \end{cases} \quad \text{或} \quad (2) \begin{cases} m=f\left(\frac{a}{2}\right) \\ n=f(n) \\ f(m)>f\left(\frac{a}{2}\right) \end{cases}$$

由(1)得 $m=a-\frac{40}{9}$, $n=a+1$.

当 $m=a-\frac{40}{9}\leq -\frac{2a}{3}$, 即 $0<a<\frac{8}{3}$ 时, 存在区间 $[a-\frac{40}{9}, a+1]$.

由(2)得 $m=-\frac{a^2}{4}$, $n=a+1$.

当 $-\frac{a^2}{4}>-\frac{2a}{3}$, 即 $0<a<\frac{8}{3}$ 时, 存在区间 $[-\frac{a^2}{4}, a+1]$.

..... 14 分

综上所述: 当 $0<a<\frac{40}{9}$ 时, 存在区间 $[m, n]$ ($n>m$), 满足条件;

当 $0<a<\frac{8}{3}$ 时, 存在三个区间 $[a-\frac{40}{9}, a+1]$, $[-\frac{a^2}{4}, a+1]$, $[a-\frac{40}{9}, 0]$ 满足条件;

当 $a=\frac{8}{3}$ 时, 存在两个区间 $[a-\frac{40}{9}, a+1]$, $[a-\frac{40}{9}, 0]$ 满足条件;

当 $\frac{8}{3}<a<\frac{40}{9}$ 时, 存在一个区间 $[a-\frac{40}{9}, 0]$ 满足条件.