

舟山市 2019-2020 学年度第二学期期末考试高二数学

参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	C	D	D	B	B	C	D	C

二、填空题

- 11、2, 0 12、 $\sqrt{7}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 13、 n , $\frac{4040}{2021}$
 14、 $\frac{2\sqrt{5}}{5}, 10$ 15、4 16、 $\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right)$ 17、 $\sqrt{3}$

三、解答题

18、解：（I）因为 α 是第二象限角，且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

所以 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

所以 $f(\alpha) = \frac{1}{3} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1 - \sqrt{6}}{3}$ 6 分

（II） $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$ ，

所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ ，

所以 $-\frac{1}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ 。

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ 14 分

19、（I）因为平面 $ABP \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $AB \perp BC$ ，

所以 $BC \perp$ 平面 ABP ，则 $\angle CPB$ 即为直线 PC 与平面 ABP 所成的角，

设 $BC = a$ ，则 $AB = 2a$ ， $BE = \sqrt{2}a$ ，所以 $CP = \sqrt{3}a$ ，

则直角三角形 CBP 中， $\sin \angle CPB = \frac{CB}{CP} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

即直线 PC 与平面 ABP 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 8 分

(II) $\frac{PF}{PA} = \frac{1}{3}$ 时, 有 $PC \parallel$ 平面 FBD ,

连接 AC 交 BD 于 M 点, 则 $\frac{CM}{AM} = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{PF}{FA}$

所以 $PC \parallel MF$

又 $MF \subset$ 面 $FBD, PC \not\subset$ 面 FBD

所以 $PC \parallel$ 平面 FBD 15 分

20、(I) 设公比为 q , 由于 $a_2, 2a_3, 3a_4$ 成等差数列则 $q + 3q^3 = 4q^2 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$

所以 $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$ 6 分

(II) (i) 设 $\frac{b_n}{a_n} = 1 + 5(n-1) = 5n-4 \Rightarrow b_n = \frac{5n-4}{3^{n-1}}$

$b_{n+1} - b_n = \frac{5n+1}{3^n} - \frac{5n-4}{3^{n-1}} = \frac{13-10n}{3^n}$

所以 $b_2 > b_1$, 当 $n \geq 2$ 时 $b_{n+1} < b_n$

所以 $(b_n)_{\max} = b_2 = 2$ 10 分

(ii) 由于 $2 \leq 2S_n < 3, 3 \leq 5 - b_n < 5$

所以 $2 \leq c_n < 5$,

设 c_n 的公差为 d , 则 $c_n = c_1 + (n-1)d$

若 $d > 0$, 则 $n > \frac{5-c_1}{d} + 1$ 时 $c_n > 5$, 不满足

若 $d < 0$, 则 $n > \frac{2-c_1}{d} + 1$ 时 $c_n < 2$, 不满足

所以 $d = 0$

又因为 $c_n \geq 3, c_2 \leq 5 - b_2 = 3$

所以 $c_n = 3$ 15

21、(I) 设 $A(t, \frac{t^2}{2})$, 过 A 切线的斜率为 t

则直线 AB 的斜率为 $k_{AB} = -\frac{1}{t}$

直线 AB 的方程为 $y - \frac{t^2}{2} = -\frac{1}{t}(x - t)$

所以 $Q(1, \frac{t^2}{2} + 1)$

$$|QF| = \frac{t^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} = |AF| \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 法 1: 联立 } \begin{cases} y - \frac{t^2}{2} = -\frac{1}{t}(x - t) \\ x^2 = 2y \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{2}{t}x - 2 - t^2 = 0$$

$$|AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \sqrt{\frac{4}{t^2} + 8 + 4t^2}$$

AC 过点 F , 则 $C(-\frac{1}{t}, \frac{1}{2t^2})$

$$C \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离 } d = \frac{\left| \frac{1}{t^2} + 1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{t^2}{2} \right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} = \frac{\left| 1 + \frac{1}{2t^2} + \frac{t^2}{2} \right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| d = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{t^2} + 8 + 4t^2} \left(1 + \frac{1}{2t^2} + \frac{t^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \right)^{\frac{3}{2}} \geq 4$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积取值范围为 $[4, +\infty)$ 15 分

法 2: (I) 其实为抛物线的光学性质,

设 C 关于直线 AB 的对称点为 C' , 由 (I) 可知 $AC' \perp x$ 轴

$$\text{由 } k_{AB} = \frac{t + x_B}{2} = -\frac{1}{t} \Rightarrow x_B = -\frac{2}{t} - t$$

$$\text{由 } y_C \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow y_C = \frac{1}{2t^2}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |x_A - x_B| |AC'| = \frac{1}{2} |x_A - x_B| |AC| = \frac{1}{2} \left| 2t + \frac{2}{t} \right| \left| \frac{1}{2t^2} + \frac{t^2}{2} + 1 \right| \geq 2 \times 2 = 4$$

22、(I) $F(x) = (x-1)e^x + 1 - ae^x$

$$F'(x) = (x-a)e^x$$

① $a \leq -2$ 时 $F'(x) \geq 0$, $F(x)$ 单调递增, 则 $m(a) = F(-2) = 1 - \frac{3+a}{e^2}$

② $-2 < a \leq 0$ 时, 当 $x \in [-2, a]$ 时 $F'(x) < 0, F'(x)$ 单调递减, 当 $x \in [a, 0]$ 时 $F'(x) > 0, F'(x)$ 单调递增, 则 $m(a) = F(a) = 1 - e^a$

③ $a > 0$ 时, $F'(x) \leq 0, F(x)$ 单调递减, 则 $m(a) = F(0) = -a$ 6 分

(II) 法 1: 设 $f_\lambda(x)$ 图像上以点 $(t, \lambda(t-1)e^t + 1) (t \in [-2, 0])$ 为切点的切线过点 $(3, 0)$

$$k = \lambda t e^t = \frac{\lambda(t-1)e^t + 1}{t-3}$$

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{1}{\lambda} = (t^2 - 4t + 1)e^t \\ \frac{1}{k} = t + \frac{1}{t} - 4 \end{cases}$$

$$\text{设 } \lambda(t) = (t^2 - 4t + 1)e^t, k(t) = t + \frac{1}{t} - 4$$

$$\text{当 } \frac{1}{k} \in \left[-\frac{13}{2}, -6\right) \text{ 即 } k \in \left(-\frac{1}{6}, -\frac{2}{13}\right] \text{ 时,}$$

存在两个不同的实数 t_1, t_2 ($-2 \leq t_1 < -1 < t_2 < 0$) 使得 $k(t_1) = k(t_2)$

$$\text{设 } \frac{1}{\lambda_1} = \lambda(t_1), \frac{1}{\lambda_2} = \lambda(t_2), \text{ 下证: } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\text{显然 } t_2 = \frac{1}{t_1}, \text{ 所以}$$

$$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = (t_1^2 - 4t_1 + 1)e^{t_1} - (t_2^2 - 4t_2 + 1)e^{t_2} = (t_1^2 - 4t_1 + 1)e^{t_1} - \left(\frac{t_1^2 - 4t_1 + 1}{t_1^2}\right)e^{\frac{1}{t_1}} = \frac{(t_1^2 - 4t_1 + 1)e^{t_1}}{t_1^2} \left(t_1^2 e^{t_1 - \frac{1}{t_1}} - 1\right)$$

$$\text{令 } g(x) = x^2 e^{x - \frac{1}{x}} - 1 (x \in [-2, -1])$$

$$g'(x) = (x+1)^2 e^{x - \frac{1}{x}} \geq 0, \text{ 所以 } g(x) \uparrow$$

$$\text{所以 } g(x) < g(-1) = 0$$

$$\text{即 } \frac{1}{\lambda_1} < \frac{1}{\lambda_2}$$

$$\text{所以 } k \in \left(-\frac{1}{6}, -\frac{2}{13}\right] \text{15 分}$$

法 2: 设 $f_\lambda(x)$ 图像上以点 $(t, \lambda(t-1)e^t + 1) (t \in [-2, 0])$ 为切点的切线过点 $(3, 0)$

$$k = \lambda t e' = \frac{\lambda(t-1)e' + 1}{t-3}$$

$$\text{则 } \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\lambda} = (t^2 - 4t + 1)e' \\ \frac{1}{k} = t + \frac{1}{t} - 4 \end{cases}$$

$$\text{设 } \lambda(t) = (t^2 - 4t + 1)e', k(t) = t + \frac{1}{t} - 4$$

$$\text{当 } \frac{1}{k} \in \left[-\frac{13}{2}, -6\right] \text{ 即 } k \in \left(-\frac{1}{6}, -\frac{2}{13}\right] \text{ 时,}$$

存在两个不同的实数 t_1, t_2 ($-2 \leq t_1 < -1 < t_2 < 0$) 使得 $k(t_1) = k(t_2)$

$$\text{设 } \frac{1}{\lambda_1} = \lambda(t_1), \frac{1}{\lambda_2} = \lambda(t_2), \text{ 下证: } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\text{构造函数 } \varphi(x) = \lambda(x) - \frac{2}{e} k(x) = (x^2 - 4x + 1)e^x - \frac{2}{e} \cdot \left(x + \frac{1}{x} - 4\right)$$

$$\varphi'(x) = (x^2 - 2x - 3)e^x - \frac{2}{e} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \left[\frac{x^2(x-3)e^x}{x-1} - \frac{2}{e}\right]$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{x^2(x-3)e^x}{x-1} - \frac{2}{e}$$

$$g'(x) = \frac{(x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 6x)e^x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-1)^2} e^x$$

$$\text{则 } x \in [-2, -\sqrt{3}], g'(x) \geq 0, g(x) \uparrow$$

$$x \in [-\sqrt{3}, 0], g'(x) \leq 0, g(x) \downarrow$$

$$\text{又 } g(-2) = \frac{20}{3e^2} - \frac{2}{e} = \frac{20-6e}{3e^2} > 0, g(0) = -\frac{2}{e} < 0, g(-1) = 0$$

所以当 $x \in (-2, -1)$ 时 $g(x) > 0$, 当 $x \in (-1, 0)$ 时 $g(x) < 0$

故 $\varphi'(x) \geq 0$, $\varphi(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上单调递增

$$\text{故 } \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$$

$$\text{又 } k(t_1) = k(t_2)$$

$$\text{则 } \lambda(t_1) \neq \lambda(t_2)$$

$$\text{所以 } k \in \left(-\frac{1}{6}, -\frac{2}{13}\right] \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$