

嘉兴市 2019~2020 学年第二学期期末检测

高一数学 参考答案 (2020.7)

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A 2. B 3. C 4. D 5. B 6. B 7. B 8. C 9. C 10. D

第 10 题解析：

对于 A 选项，假设 $\{a_n\}$ 有界，即存在常数 M ，对任意 $n \in N^*$ ，都有 $a_{n+1} \leq M, a_n \leq M$ ，

则 $1+n = a_{n+1} + a_n \leq M + M = 2M$ 。由于左边 $1+n$ 递增到无穷大，而右边为常数，从而 A 项错误；

同理，C 项 $a_{n+1}a_n = 1 + 2^n \leq M^2$ ，错误；

对于 B 项， $n \geq 2$ 时， $a_{n+1} - a_n = 1 - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}$ ，累加可得， $a_n - a_2 \geq \frac{1}{2}(n-2)$ ， $a_2 = 1, a_n \geq \frac{n}{2}$ ，显然不是有界的；

对于 D 选项， $a_2 = 2$ ， $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{n^2} = \frac{n^2+1}{n^2} < \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{n^2}{(n+1)(n-1)} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{n-1}$ ，

累乘可得 $\frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \cdots \times \frac{a_3}{a_2} = \left(\frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n-2} \times \frac{n-2}{n-3} \times \cdots \times \frac{2}{1}\right)$ ，

$\frac{a_n}{a_2} = \frac{2}{n} \cdot (n-1) < 2$ ，从而 $a_n < 4$ ，D 正确。

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11. 1; $n-2$. 12. 1; $2\sqrt{2}$. 13. 7; $\frac{1}{10}$. 14. 2; 3

15. $\frac{\sqrt{19}}{2}$. 16. 2020. 17. $\frac{1}{8}$.

第 17 题解析：

设 $\angle CAB = \theta (\theta < \frac{\pi}{4})$ ，则折叠后， $AB' = \cos \theta$ ， $AD = \sin \theta$ ， $\angle B'AD = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ ，

故 $S_{\triangle ADB'} = \frac{1}{2} AB' \cdot AD \cdot \sin \angle DAB' = \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) = \frac{1}{8} \sin 4\theta \leq \frac{1}{8}$ ，

取最大值时 $\theta = \frac{\pi}{8}$ 。

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. (本题满分 14 分)

已知点 $A(1, 2)$ 和直线 $l_1: 2x - y + a = 0$.

(I) 若点 A 在直线 l_1 上，求 a 的值；

(II) 若直线 l_2 过点 A 且与直线 l_1 垂直，求直线 l_2 的方程.

解：(I) 点 $A(1, 2)$ 代入直线 l_1 的方程，得 $2 - 2 + a = 0$ ，解得 $a = 0$.

(II) 直线 l_1 的斜率为 2，所以 l_2 的斜率为 $-\frac{1}{2}$ ，

从而 l_2 的方程为： $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$ ，即 $x + 2y - 5 = 0$.

19. (本题满分 15 分)

已知 α, β 都是锐角，且 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ， $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$.

(I) 求 $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha$ 的值；

(II) 求 $\sin \beta$ 的值.

解：(I) 由 α 是锐角，且 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ，则 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

所以 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$ ， $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$.

(II) 由 $0 < \alpha + \beta < \pi$ ， $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$ ，则 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{12}{13}$ ，

故 $\sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha] = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{65}$.

20. (本题满分 15 分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，前 n 项和为 S_n ，且满足 $d = -2$ ， $S_4 = 76$. 等比数列 $\{b_n\}$

满足 $b_1 + b_3 = 10$ ， $b_2 + b_4 = 20$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(II) 设 $c_n = (23 - a_n)b_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

解：(I) $S_4 = 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = 76$ ，解得 $a_1 = 22$ ，从而 $a_n = 24 - 2n$ 。

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q^2 = 10 \\ b_1 q + b_1 q^3 = 20 \end{cases}, \text{ 两式相除得 } q = 2, \quad b_1 = 2, \text{ 所以 } b_n = 2^n.$$

$$(II) \quad c_n = (23 - a_n)b_n = (2n - 1) \cdot 2^n.$$

$$T_n = 1 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \cdots + (2n - 1)2^n,$$

$$2T_n = \quad 1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (2n - 3)2^n + (2n - 1)2^{n+1},$$

$$\text{相减得: } -T_n = 2^1 + 2(2^2 + \cdots + 2^n) - (2n - 1)2^{n+1}$$

$$= 2 + 2 \frac{4 - 2^{n+1}}{1 - 2} - (2n - 1)2^{n+1} = (3 - 2n)2^{n+1} - 6,$$

$$\text{从而 } T_n = (2n - 3)2^{n+1} + 6.$$

21. (本题满分 15 分)

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $B \neq \frac{\pi}{2}$ ，且 $\sin C - \cos A \sin B + \sin C \cos B = \sin 2B$ ，设角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c 。

(I) 求证： a, b, c 成等差数列；

(II) 若 $\frac{\sin A}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A} = 3$ ，求 $\sin A + \sin C$ 的值。

解：(I) $\sin(A + B) - \cos A \sin B + \sin C \cos B = 2 \sin B \cos B$ 。

$$\sin A \cos B + \sin C \cos B = 2 \sin B \cos B, \quad B \neq \frac{\pi}{2}, \text{ 从而 } \sin A + \sin C = 2 \sin B,$$

$$a + c = 2b, \text{ 即 } a, b, c \text{ 成等差数列}.$$

$$(II) \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} = 3, a^2 + c^2 = 3ac, \text{ 又 } a + c = 2b, \quad b^2 = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 + 2ac) = \frac{5}{4}ac.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3ac - \frac{5}{4}ac}{2ac} = \frac{7}{8}, \quad \sin B = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

$$\text{即 } \sin A + \sin C = 2 \sin B = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

22. (本题满分 15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $\sqrt{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{a_n}}{1 + \sqrt{a_n}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \sqrt{1 + 3a_n} - a_n$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $0 \leq S_n - n < \frac{1}{2}$.

解: (I) 由题设得 $\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} = \frac{1 + \sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}} = \frac{1}{\sqrt{a_n}} + 1$,

从而 $\{\frac{1}{\sqrt{a_n}}\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 所以 $\frac{1}{\sqrt{a_n}} = n$,

即 $a_n = \frac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad b_n &= \sqrt{1 + 3a_n} - a_n = \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} - \frac{1}{n^2} = \sqrt{1 \cdot (1 + \frac{3}{n^2})} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1 + 1 + \frac{3}{n^2}}{2} - \frac{1}{n^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2n^2} < 1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

故 $S_n - n = (b_1 - 1) + (b_2 - 1) + \cdots + (b_n - 1)$

$$\leq 0 + \frac{1}{2}(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + \frac{1}{2}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) < \frac{1}{2}.$$

另一方面: $b_n = \sqrt{1 + 3a_n} - a_n = \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} - \frac{1}{n^2} = \sqrt{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4} + (\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4})} - \frac{1}{n^2}$

$$\geq (1 + \frac{1}{n^2}) - \frac{1}{n^2} = 1.$$

从而 $S_n \geq n$, 即 $S_n - n \geq 0$.

综上得: $0 \leq S_n - n < \frac{1}{2}$.