2018学年第二学期杭州市高三年级教学质量检测
数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	D	C	B	A	C	A	C	D

二、**填空题**（本大题共 7 小题，第 11-14 题，每小题 6 分，15-17 每小题 4 分，共 36 分）

11．$2\sqrt{5}$，$y=\pm\frac{1}{2}x$　　12．$\frac{1}{4}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　13．$\frac{\sqrt{10}}{4}$，$\sqrt{6}$ 或 $2\sqrt{6}$

14．5，$\frac{49}{5}$　　15．32　　16．20　　17．$\frac{\sqrt{3}}{12}$

三、解答题：（本大题共 5 小题，共 74 分）

18．（本题满分 14 分）

解：因为 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$，　　………5 分

（Ⅰ）函数 $f(x)$的单调增区间为$[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

………4 分

（Ⅱ）因为 $x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$，

所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,\frac{1}{2}]$，

所以 $f(x)$的值域为$[-1，2]$.　　………5 分

19．（本题满分 15 分）

解：（Ⅰ）因为$\angle BAF=90°$，所以 $AF\perp AB$，

又因为平面 $ABEF\perp$平面 $ABCD$，且平面 $ABEF\cap$平面 $ABCD=AB$，

所以 $AF\perp$平面 $ABCD$.　　………5 分

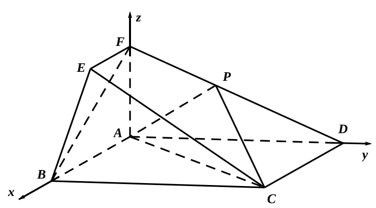
（Ⅱ）如图，建立以 A 为坐标原点，AB，AD，AF 分别为 x，y，z 轴的空间直角坐标系.

所以 $B(1，0，0)$，$C(1，2，0)$，$D(0，2，0)$.

因为 $AB\perp$平面 ADF，

所以平面 DAP 的法向量为 $n_1=(1，0，0)$.

设 $\overrightarrow{FP}=\lambda\overrightarrow{FD}$，则 $P(0，2\lambda，1-\lambda)$，



所以 $\overrightarrow{AP}=(0，2\lambda，1-\lambda)$，$\overrightarrow{AC}=(1，2，0)$，

设平面 APC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x，y，z)$，则

$$\begin{cases}2\lambda y+(1-\lambda)z=0\\x+2y=0\end{cases}$$，取 $x=-2, y=1, z=\frac{2\lambda}{\lambda-1}$.

所以 $\boldsymbol{n}_2=(-2,1,\dfrac{2\lambda}{\lambda-1})$，

所以 $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{2}{\sqrt{(-2)^2+1+\left(\dfrac{2\lambda}{\lambda-1}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$．所以 $PF=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$． ………10 分

20．（本题满分 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $B_{n+3}=q^3B_n+b_1+b_2+b_3=8B_n+7$，

所以 $\begin{cases}q^3=8\\ b_1+b_2+b_3=7\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b_1=1\\ q=2\end{cases}$．

所以 $b_n=2^{n-1}$．

又因为 $a_1=b_2=2$，$a_4=b_4=8$，

所以 $d=2$，$a_n=2n$，因此 $A_n=n^2+n$． ………8 分

（Ⅱ）设 $c_n=b_n-A_n=2^{n-1}-n^2-n$．

又因为 $c_{n+1}-c_n=2^{n-1}-2(n+1)$，

所以当 $n\leqslant4$ 时，$c_{n+1}<c_n$，当 $n\geqslant5$ 时，$c_{n+1}>c_n$，

所以数列$\{c_n\}$的最小项为 $c_5=-14$． ………7 分

21．（本题满分 15 分）

解：（Ⅰ）设直线 PA 的方程为 $y=k(x-1)+1$，与抛物线 $y=x^2$ 联立，

得 $x^2-kx+k-1=0$，

易知 $A(k-1,(k-1)^2)$，$B(-k-1,(k+1)^2)$，

所以直线 AB 的斜率 $k_{AB}=-2$（定值）． ………7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得直线 AB 的方程为 $y=-2(x-k+1)+(k-1)^2$，

所以点 P 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{k^2-4}{\sqrt{5}}$．

$|AP|=\sqrt{1+k^2}\cdot(k-2)$，$|BP|=\sqrt{1+k^2}\cdot(k+2)$，$|AB|=2\sqrt{5}k$．

（i）求△ABP 的周长 $l=2k\sqrt{1+k^2}+2\sqrt{5}k$； ………3 分

（ii）设△ABP 的内切圆半径为 r，则 $r=\sqrt{26}-\sqrt{5}$，

$r=\dfrac{|AB|\cdot d}{l}=\dfrac{k^2-4}{\sqrt{1+k^2}+\sqrt{5}}=\sqrt{1+k^2}-\sqrt{5}$，

即 $\sqrt{1+k^2}-\sqrt{5}=\sqrt{26}-\sqrt{5}$，解得 $k=5$．

所以直线 AB 的方程为 $y=-2x+24$． ………5 分

22．（本题满分 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f'(x)=x\mathrm{e}^x$，

所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$(0，+\infty)$． ………3 分

（Ⅱ）设 $g(x)=(x-1)\mathrm{e}^x-ax-b$，则 $g'(x)=x\mathrm{e}^x-a$．

① 当 $a\leqslant 0$ 时，

因为 $g'(x)\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，

所以 $g(0)=-1-b\leqslant 0$，得 $b\geqslant -1$，故 $a^2+4b\geqslant -4$．

② 当 $a>0$ 时，

存在 $x_0>0$ 使 $g'(x_0)=0$，即 $a=x_0\mathrm{e}^{x_0}$，且 $g(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上单调递减，在 $[x_0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x_0)=(x_0-1)\mathrm{e}^{x_0}-ax_0-b\leqslant 0$，解得 $b\geqslant (x_0-1)\mathrm{e}^{x_0}-ax_0=(x_0-1)\mathrm{e}^{x_0}-x_0^2\mathrm{e}^{x_0}$，

因此 $a^2+4b\geqslant x_0^2\mathrm{e}^{2x_0}-4(x_0^2-x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}$．

设 $h(x)=x^2\mathrm{e}^{2x}-4(x^2-x+1)\mathrm{e}^x$，则 $h'(x)=2(x^2+x)\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-2)$，

所以 $h(x)$ 在 $[0,\ln 2]$ 上单调递减，在 $[\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(\ln 2)<h(0)=-4$，$h(x)\geqslant h(\ln 2)=-4\ln^2 2+8\ln 2-8$．

所以当 $a=2\ln 2$，$b=-2\ln^2 2+2\ln 2-2$ 时，

a^2+4b 取到最小值$-4(\ln 2-1)^2$，此时方程 $f(x)=ax+b$ 有零点 $\ln 2$．

………12 分