

2015 学年第二学期高三调测试卷

数学（文）参考答案及评分标准

一、选择题（本大题共有 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	C	C	A	D	B	D

二、填空题（本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分）

9. $2\sqrt{5}$, $(0, \pm 2)$

10. -3 , 2

11. 2 ; $(-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$

12. $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13. 2

14. $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

15. $[0, 2]$

三、解答题(本大题共 5 小题，共 74.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

16.（本题满分 15 分）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的所对边分别为 a, b, c .

已知 $a^2 + b^2 + 5ab \cos C = 0$, $\sin^2 C = \frac{7}{2} \sin A \sin B$.

（I）求角 C 的大小；

（II）若 $a = 1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的值.

解：（I）由题意及余弦定理得， $a^2 + b^2 + 5ab \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0$,

即 $7(a^2 + b^2) = 5c^2$ 2 分

由题意及正弦定理得， $c^2 = \frac{7}{2} ab$ 4 分

故 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-\frac{2}{7}c^2}{2ab} = -\frac{1}{2}$ 6 分

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\angle C = \frac{2\pi}{3}$ 7 分

(II) 因为 $a=1$ ，由 (I) 知， $\begin{cases} c^2 = \frac{7}{2}b \\ 5c^2 = 7 + 7b^2 \end{cases}$ ，解得 $b = \frac{1}{2}$ 或 $b = 2$ 。.....10 分

① 当 $b = \frac{1}{2}$ 时， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{8}$ ；.....12 分

② 当 $b = 2$ 时， $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。.....14 分

综上， $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。.....15 分

17. (本题满分 15 分) 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC \perp BC$ ， $AC_1 \perp$ 平面 ABC ，

$BC = CA = AC_1$ 。

(I) 求证： $AC \perp$ 平面 AB_1C_1 ；

(II) 求直线 A_1B 与平面 AB_1C_1 所成角的余弦值。

(I) 证明：因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ ，

所以 $BC \parallel B_1C_1$ 。

又因为 $\angle ACB = 90^\circ$ ，所以 $AC \perp B_1C_1$ 。.....3 分

因为 $AC_1 \perp$ 平面 ABC ，所以 $AC_1 \perp AC$ 。.....6 分

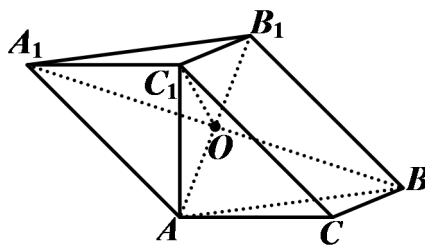
因为 $AC_1 \cap B_1C_1 = C_1$ ，所以 $AC \perp$ 平面 AB_1C_1 。...7 分

(II) 解：因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中 $AC \parallel A_1C_1$ ，

又由 (I) 知， $AC \perp$ 平面 AB_1C_1 ，所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 AB_1C_1 。.....10 分

设 A_1B 交 AB_1 于点 O ，所以 $\angle A_1OC_1$ 为直线 A_1B 与平面 AB_1C_1 所成角。.....12 分

设 $BC = CA = AC_1 = a$ ，



第 17 题图

直角三角形 AC_1O 中, $OC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $A_1O = \frac{\sqrt{6}}{2}a$14 分

因此, $\cos \angle A_1OC_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故直线 A_1B 与平面 AB_1C_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$15 分

18. (本题满分 15 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdots 2^{a_n} = 2^{\frac{75n-5n^2}{2}} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(I) 求 a_n ;

(II) 令 $T_n = |a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+5}| (n \in \mathbf{N}^*)$, 求 T_n 的最小值.

解: (I) 当 $n=1$ 时, $2^{a_1} = 2^{35}$, 所以 $a_1 = 35$, -----2 分

$$n \geq 2 \text{ 时, } 2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdots 2^{a_n} = 2^{\frac{75n-5n^2}{2}},$$

$$2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdots 2^{a_{n-1}} = 2^{\frac{75(n-1)-5(n-1)^2}{2}}, \text{ -----4 分}$$

$$\text{两式相除得, } 2^{a_n} = 2^{\frac{75n-5n^2}{2} - \frac{75(n-1)-5(n-1)^2}{2}}, \text{ -----6 分}$$

$$\text{化简得, } 2^{a_n} = 2^{40-5n}, \text{ 即 } a_n = 40-5n; \text{ -----8 分}$$

$$\text{又 } a_1 = 35 \text{ 满足上式, 所以 } a_n = 40-5n (n \in \mathbf{N}^*). \text{ -----9 分}$$

$$(II) \text{ 由 (I) 得, } a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+5} = \frac{6(a_n + a_{n+5})}{2} = 15(11-2n), \text{ -----13 分}$$

$$\text{所以 } T_n = |15(11-2n)|.$$

$$\text{所以当 } n=5, \text{ 或 } n=6 \text{ 时, } (T_n)_{\min} = 15. \text{ -----15 分}$$

19. (本题满分 15 分) 已知点 $C(x_0, y_0)$ 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上的动点, 以 C 为圆心的圆过

该抛物线的焦点 F , 且圆 C 与直线 $x = -\frac{1}{2}$ 相交于 A, B 两点.

(I) 当 $|FC| = 3$ 时, 求 $|AB|$;

(II) 求 $|FA| \cdot |FB|$ 的取值范围.

解：（Ⅰ）因为 $|FC| = x_0 + \frac{p}{2} = x_0 + 1$ ，

所以 $x_0 = 2$ ；-----2 分

所以点 C 到 $x = -\frac{1}{2}$ 的距离 $d = \frac{5}{2}$ ，-----4 分

所以圆 C 的半径是 $|FC| = 3$ ，

$$|AB| = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{11} . \text{-----6 分}$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知， $F(1,0)$ ，

圆 C 的方程是 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x_0 - 1)^2 + y_0^2$ ，

令 $x = -\frac{1}{2}$ ， $y^2 - 2y_0y + 3x_0 - \frac{3}{4} = 0$ ，-----7 分

$\Delta = 4y_0^2 - 12x_0 + 3 = 4x_0 + 3 > 0$ 恒成立，

设 $A\left(-\frac{1}{2}, y_1\right), B\left(-\frac{1}{2}, y_2\right)$ ，则 $y_1 + y_2 = 2y_0$ ， $y_1 \cdot y_2 = 3x_0 - \frac{3}{4}$ ，-----9 分

因为点 $C(x_0, y_0)$ 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上，故 $y_0^2 = 4x_0$ ，

$$\text{所以 } |FA| \cdot |FB| = \sqrt{y_1^2 + \frac{9}{4}} \cdot \sqrt{y_2^2 + \frac{9}{4}} = \sqrt{(y_1 y_2)^2 + \frac{9}{4}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{81}{16}} . \text{-----11 分}$$

$$= \sqrt{\left(3x_0 - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}\left[4y_0^2 - 2\left(3x_0 - \frac{3}{4}\right)\right] + \frac{81}{16}} .$$

$$= \sqrt{9x_0^2 + 18x_0 + 9} = 3|x_0 + 1|, \text{-----13 分}$$

因为 $x_0 \geq 0$ ，所以 $|FA| \cdot |FB| \in [3, +\infty)$. -----15 分

20.（本题满分 14 分）已知 $a > 0$ ， $b \in \mathbb{R}$ ，函数 $f(x) = 4ax^2 - 2bx - a + b$ ， $x \in [0, 1]$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最大值；

（Ⅱ）若 $-1 \leq f(x) \leq 1$ 对任意的 $x \in [0, 1]$ 恒成立，求 $a + b$ 的取值范围.

解：（I）①方法一：当 $\frac{b}{4a} \leq \frac{1}{2}$ 即 $b \leq 2a$ 时， $f(x)_{\max} = f(1) = 3a - b$ ；-----3 分

当 $\frac{b}{4a} > \frac{1}{2}$ 即 $b > 2a$ 时， $f(x)_{\max} = f(0) = -a + b$

因此 $f(x)_{\max} = \begin{cases} 3a - b, b \leq 2a \\ -a + b, b > 2a \end{cases} = |2a - b| + a$. -----6 分

方法二：

$f(x)_{\max} = \max \{f(0), f(1)\}$. -----3 分

$\max \{-a + b, 3a - b\} = \begin{cases} 3a - b, b \leq 2a \\ -a + b, b > 2a \end{cases} = |2a - b| + a$. -----6 分

（II）先证明 $f(x) + |2a - b| + a \geq 0$.

$$\text{令 } g(x) = 4ax^2 - 2bx + b + |2a - b|,$$

当 $b \leq 2a$ 时， $g(x) = 4ax^2 - 2bx + 2a$

$$\geq 4ax^2 - 4ax + 2a = 2a(2x^2 - 2x + 1), \text{ -----8 分}$$

当 $b > 2a$ 时， $g(x) = 4ax^2 + 2b(1 - x) - 2a$

$$\geq 4ax^2 + 4a(1 - x) - 2a = 2a(2x^2 - 2x + 1)$$

显然 $2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$. -----10 分

（按对称轴分三类讨论酌情给分）

结合（I）知 $|f(x)| \leq |2a - b| + a$ ，所以要使 $-1 \leq f(x) \leq 1$ 对任意的 $x \in [0, 1]$ 恒成

立，则 $\begin{cases} |2a - b| + a \leq 1 \\ a > 0 \end{cases}$. 即 $\begin{cases} a > 0 \\ 2a - b \geq 0 \text{ 或 } 2a - b < 0 \\ 3a - b \leq 1 \\ b - a \leq 1 \end{cases}$, -----12 分

由线性规划知识得 $a + b \in (-1, 3]$. -----14 分