

2015 年高三第二次教学质量检测

参考答案及评分标准（理科）

一、选择题（本大题共有 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	D	C	C	A	A	B

二、填空题（本大题共 7 小题，第 9 至 12 每题 6 分，13 至 15 题每题 4 分，共 36 分）

$$9. (2,3) ; (-3,4) ; (-\infty,-3] \cup [3,+\infty) \quad 10. \sqrt[3]{4} ; n^2 - n$$

$$11. \pi ; \left(k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6} \right) (k \in Z) \quad 12. \frac{3}{5} ; -\frac{1}{2}$$

$$13. 2\sqrt{5} \quad 14. \left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right] \quad 15. 3$$

三、解答题（本大题共 5 小题，共 74 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

16. （本小题满分 15 分）

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 已知 } AB = 2, \cos B = \frac{1}{3}.$$

（I）若 $AC = 2\sqrt{2}$ ，求 $\sin C$ 的值；

（II）若点 D 在边 AC 上,且 $AD = 2DC$, $BD = \frac{4}{3}\sqrt{3}$,求 BC 的长.

$$\text{解析: (I) 因为 } \cos B = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } \sin B = \frac{2}{3}\sqrt{2}, \quad \text{-----3 分}$$

$$\text{因为 } \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}, \text{ 且 } AC = 2\sqrt{2}, AB = 2, \quad \text{-----5 分}$$

$$\text{所以 } \sin C = \frac{AB \cdot \sin B}{AC} = \frac{2}{3} \quad \text{-----6 分}$$

（II）解法 1：在 $\triangle ABC$ 中，设 $BC = a$ ， $AC = b$ ，因为 $AB = 2$ ， $\cos B = \frac{1}{3}$ ，

$$\text{由余弦定理可得 } b^2 = a^2 + 4 - \frac{4}{3}a \quad \text{.....①} \quad \text{-----8 分}$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理可得

$$\cos \angle ADB = \frac{\frac{4}{9}b^2 + \frac{16}{3} - 4}{2 \cdot \frac{2}{3}b \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3}}, \quad \cos \angle BDC = \frac{\frac{b^2}{9} + \frac{16}{3} - a^2}{2 \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3}} \quad \text{-----12 分}$$

因为 $\cos \angle ADB = -\cos \angle BDC$,

$$\text{所以有 } \frac{\frac{4}{9}b^2 + \frac{16}{3} - 4}{2 \cdot \frac{2}{3}b \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3}} = -\frac{\frac{b^2}{9} + \frac{16}{3} - a^2}{2 \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3}}, \text{ 所以 } \frac{b^2}{3} - a^2 = -6 \dots\dots \textcircled{2} \quad \text{-----14 分}$$

由①②可得 $a = 3, b = 3$, 即 $BC = 3$. -----15 分

解法 2: 因为 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, -----10 分

$$\text{由 } \overrightarrow{BD}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)^2, \quad \text{-----12 分}$$

$$\text{得 } \frac{16}{3} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9}|BC|^2 + \frac{4}{9} \cdot 2 \cdot |BC| \cdot \frac{1}{3},$$

$$\text{解得 } |BC| = 3 \text{ 或 } |BC| = -\frac{11}{3} \text{ (舍去)} \quad \text{-----14 分}$$

所以 $BC = 3$. -----15 分

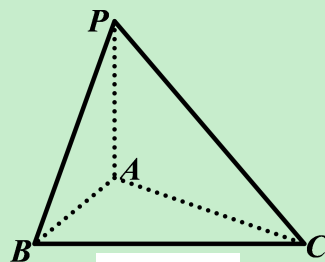
17. (本小题满分 15 分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA = 1$,

$$PB = PC = BC = 2, \quad AB = AC = \sqrt{3}.$$

(I) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ;

(II) 求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.



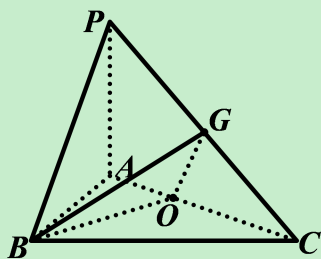
第 17 题

(I) 证明: 由已知, $PA^2 + AB^2 = PB^2, PA \perp AB$, -----2 分

同理, $PA \perp AC$, 又 $AB \cap AC = A$, -----4 分

所以 $PA \perp$ 面 ABC , -----5 分

因为 $PA \subset$ 面 PAC , 面 $PAC \perp$ 面 ABC . -----6 分



(II) 在三角形 ABC 内过点 B 作 $BO \perp AC$, 垂足是 O ,
因为面 $PAC \perp$ 面 ABC ,

则 $BO \perp$ 面 PAC , -----9 分

在三角形 PAC 内作 $OG \perp PC$, 垂足是 G ,

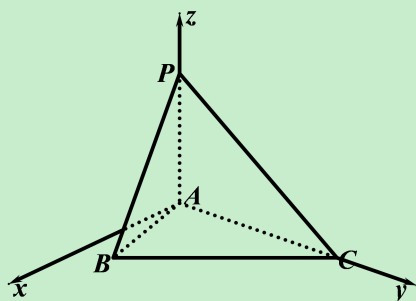
连接 AG , 则 $\angle BGO$ 是二面角 $A-PC-B$ 的

平面角, -----11 分

易得, $BO = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $OG = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $BG = \sqrt{3}$, -----13 分

$\cos \angle BGO = \frac{GO}{BG} = \frac{1}{3}$, -----15 分

所以二面角 $A-PC-B$ 的余弦值是 $\frac{1}{3}$.



(II) 解法 2, 如图, 以 A 为原点, AC 所在直线为
 y 轴, AP 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系,

由已知条件得,

$$A(0,0,0), B\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right),$$

$$C(0, \sqrt{3}, 0), P(0,0,1), \text{ -----8 分}$$

$$\overrightarrow{PB} = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right), \overrightarrow{PC} = (0, \sqrt{3}, -1), \text{ -----9 分}$$

$$\text{设面 } PBC \text{ 的法向量是 } \vec{m}, \text{ 由 } \begin{cases} \frac{2\sqrt{6}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y - z = 0, \\ \sqrt{3}y - z = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \vec{m} = (\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{3}), \text{ -----11 分}$$

$$\text{因为 } x \text{ 轴} \perp \text{面 } PAC, \text{ 故 } PAC \text{ 的法向量 } \vec{n} = (1, 0, 0), \text{ -----13 分}$$

$$\text{设二面角 } A-PC-B \text{ 的大小为 } \beta, \text{ 则 } \cos \beta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|}, \text{ -----14 分}$$

$$= \frac{1}{3}. \quad \text{-----15 分}$$

(针对其他建系方法: 建系、标出点的坐标 2 分, 两个法向量一个 2 分一个 3 分共 5 分, 向量公式 1 分, 结论 1 分)

18. (本小题满分 15 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1 = a$ ($a \neq 3$), $a_{n+1} = S_n + 3^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(I) 设 $b_n = S_n - 3^n$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 并写出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 若数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 求 a 的取值范围.

解: (I) 由 $a_{n+1} = S_n + 3^n$ 得: $S_{n+1} - S_n = S_n + 3^n$, ----- 2 分

即 $S_{n+1} = 2S_n + 3^n$, 所以 $S_{n+1} - 3^{n+1} = 2(S_n - 3^n)$,

即 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$, -----4 分

又 $b_1 = S_1 - 3 = a - 3 \neq 0$,

$\{b_n\}$ 是首项为 $a - 3$, 公比为 2 的等比数列, -----5 分

且 $b_n = S_n - 3^n = (a - 3) \cdot 2^{n-1}$ ----- 7 分

(II) 由 (I) 知 $S_n - 3^n = (a - 3) \cdot 2^{n-1}$,

$\therefore S_n = (a - 3) \cdot 2^{n-1} + 3^n$ -----8 分

$\therefore a_{n+1} = S_n + 3^n = (a - 3) \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 3^n$ -----9 分

$\therefore a_n = (a - 3) \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 2$) -----10 分

由题意得, $a_{n+1} > a_n$ 即 $a_{n+1} - a_n > 0$,

代入后解得: $\frac{3-a}{8} < (\frac{3}{2})^{n-1}$ ($n \geq 2$) 恒成立. ----- 12 分

因为 $n \geq 2$, 所以 $\frac{3-a}{8} < \frac{3}{2}$, 解得 $a > -9$, ----- 13 分

而当 $n=1$ 时, $\because a_2 = a+3$, $\therefore a_{n+1} - a_n = a_2 - a_1 = 3 > 0$. ----- 14 分

综上所述, $a \in (-9, 3) \cup (3, +\infty)$ ----- 15 分

19. (本小题满分 15 分)

已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 过点

$P(-1, 0)$ 作互相垂直的两直线 l_1, l_2 , 使得 l_1 与椭圆 C 交于 A, B 两点, l_2 与圆 O 交于

P, Q 两点. 当直线 l_1 与 x 轴垂直时, $|AB| = \sqrt{6}$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 若 $\angle AQB = 90^\circ$, 求直线 l_1 的方程.

解: (I) 由 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 得, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$, ① ----- 2 分

因点 $\left(-1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 在椭圆上, 故 $\frac{1}{a^2} + \frac{6}{4b^2} = 1$, ② ----- 4 分

解①②得, $a = 2, b = \sqrt{2}$; ----- 5 分

(II) 解法 1, 设 $l_1: x = my - 1 (m \neq 0)$, 则 $l_2: x = -\frac{1}{m}y - 1$, ----- 6 分

由 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ x = my - 1 \end{cases}$ 得, $(m^2 + 2)y^2 - 2my - 3 = 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$y_1 + y_2 = \frac{2m}{m^2 + 2}, y_1 \cdot y_2 = \frac{-3}{m^2 + 2}$, ----- 8 分

故 $|PA| \cdot |PB| = (1 + m^2) |y_1 y_2| = \frac{3(m^2 + 1)}{m^2 + 2}$, ----- 10 分

因 $l_2: mx + y + m = 0$, 由 $\left(\frac{|PQ|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|m|}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2 = 1$ 得, $|PQ|^2 = \frac{4}{m^2 + 1}$, ----- 12 分

由已知, $|PQ|^2 = |PA| \cdot |PB|$, 即 $\frac{4}{m^2+1} = \frac{3(m^2+1)}{m^2+2}$, 解得, $m^2 = 1$, -----13 分

所以 $l_1: x = \pm y - 1$. -----15 分

解法 2, 设 $l_1: x = my - 1 (m \neq 0)$, 则 $l_2: x = -\frac{1}{m}y - 1$, -----6 分

由 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = -\frac{1}{m}y - 1 \end{cases}$ 得, $(m^2 + 1)x^2 + 2m^2x + m^2 - 1 = 0$, 设 $Q(x_0, y_0)$

由韦达定理 $x_0 - 1 = \frac{-2m^2}{m^2 + 1}$, $x_0 = \frac{1 - m^2}{m^2 + 1}$, 从而 $y_0 = \frac{-2m}{m^2 + 1}$, -----8 分

即 Q 点的坐标是 $\left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \frac{-2m}{1 + m^2}\right)$.

由 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ x = my - 1 \end{cases}$ 得, $(m^2 + 2)y^2 - 2my - 3 = 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$y_1 + y_2 = \frac{2m}{m^2 + 2}, y_1 \cdot y_2 = \frac{-3}{m^2 + 2}$, -----10 分

因为 $\angle AQB = 90^\circ$, 所以 $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) + (y_0 - y_1)(y_0 - y_2) = 0$, -----12 分

$$x_0^2 + y_0^2 - (x_1 + x_2)x_0 + x_1x_2 + y_1y_2 - (y_1 + y_2)y_0 = 0,$$

$$3m^4 + 2m^2 - 5 = 0, \quad m^2 = 1 \quad \text{-----14 分}$$

所以 $l_1: x = \pm y - 1$. -----15 分

(两条直线写出一条不扣分)

20. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = 3ax^2 - 2bx - a$, $x \in [-1, 1]$, $a > 0, b \in R$.

(I) 若 $b \in [0, 3a]$, 求 $f(x)$ 的值域;

(II) 求证: $|f(x)| \leq \max\{f(-1), f(1)\}$.

解：(I) 因为 $b \in [0, 3a]$ ，所以 $x = \frac{b}{3a} \in [0, 1]$ ，-----1 分

所以，当 $x = \frac{b}{3a}$ 时， $f(x)_{\min} = -\frac{3a^2 + b^2}{3a}$ ，-----2 分

当 $x = -1$ 时， $f(x)_{\max} = 2a + 2b$ ，-----3 分

所以 $f(x)$ 的值域是 $\left[-\frac{3a^2 + b^2}{3a}, 2a + 2b\right]$ 。-----5 分

(II) 证明：已知 $f(x) = 3ax^2 - 2bx - a$ ，其对称轴方程为 $x = \frac{b}{3a}$ ，记 $x_0 = \frac{b}{3a}$ ，

则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最值可能为： $f(x_0)$ ， $f(-1)$ ， $f(1)$ ，

$$f(x_0) = -\frac{3a^2 + b^2}{3a}, \quad f(-1) = 2a + 2b, \quad f(1) = 2a - 2b,$$

下面分类讨论证明 $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| = \max\{f(-1), f(1)\}$ 。-----6 分

① 当 $-1 \leq x_0 \leq 0$ 时，即 $-3a \leq b \leq 0$ ，此时 $\begin{cases} f(x)_{\min} = f(x_0) < 0 \\ f(x)_{\max} = f(1) > 0 \end{cases}$ ，

则 $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| = \max\{|f(x_0)|, f(1)\}$ ，

$$\because f(1) - |f(x_0)| = 2a - 2b - \frac{3a^2 + b^2}{3a} = \frac{3a^2 - 6ab - b^2}{3a} = \frac{3a^2 - b(3a + 3a + b)}{3a} > 0$$

$$\therefore f(1) > |f(x_0)|,$$

即 $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| = f(1) = \max\{f(-1), f(1)\}$ -----8 分

② 当 $0 < x_0 \leq 1$ 时，即 $0 < b \leq 3a$ ，此时 $\begin{cases} f(x)_{\min} = f(x_0) < 0 \\ f(x)_{\max} = f(-1) > 0 \end{cases}$ ，

则 $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| = \max\{|f(x_0)|, f(-1)\}$ ，

$$\because f(-1) - |f(x_0)| = 2a + 2b - \frac{3a^2 + b^2}{3a} = \frac{3a^2 + 6ab - b^2}{3a} = \frac{3a^2 + b(3a + 3a - b)}{3a} > 0$$

$$\therefore f(-1) > |f(x_0)|,$$

$$\text{即 } \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| = f(-1) = \max\{f(-1), f(1)\} \text{ -----10 分}$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } x_0 \leq -1 \text{ 时, 即 } b \leq -3a < 0, \text{ 此时 } \begin{cases} f(x)_{\min} = f(-1) < 0 \\ f(x)_{\max} = f(1) > 0 \end{cases},$$

$$\text{则 } \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| = \max\{f(1), |f(-1)|\},$$

$$\therefore f(1) - |f(-1)| = 2a - 2b + 2a + 2b = 4a > 0, \therefore f(1) > |f(-1)|$$

$$\text{即 } \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| = f(1) = \max\{f(-1), f(1)\} \text{ -----12 分}$$

$$\textcircled{4} \text{ 当 } x_0 \geq 1 \text{ 时, 即 } b \geq 3a > 0, \text{ 此时 } \begin{cases} f(x)_{\min} = f(1) < 0 \\ f(x)_{\max} = f(-1) > 0 \end{cases},$$

$$\text{则 } \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| = \max\{|f(1)|, f(-1)\},$$

$$\therefore f(-1) - |f(1)| = 2a + 2b - 2a + 2b = 4b > 0, \therefore f(-1) > |f(1)|$$

$$\text{即 } \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| = f(-1) = \max\{f(-1), f(1)\} \text{ -----13 分}$$

综合 1), 2), 3), 有 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 有 $|f(x)| \leq \max\{f(-1), f(1)\}$. ----14 分

说明:①(II)若学生将命题转化为“ $|f(x)|_{\max} \leq \max\{f(-1), f(1)\}$ ”给 1 分; ②(II)中参考答案的解法共分四类, 若学生有分类思想的, 给 2 分; 若分类正确者再给 2 分. 其它情况解法酌情给分.