

2018 学年第一学期杭州市高三年级教学质量检测

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	A	D	C	D	B	B	C	D

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11. 3; 3 12. $-\frac{1}{2}; \frac{7\sqrt{3}}{3}$ 13. (0, 1); $y = \pm \sqrt{2}x$
 14. $288 - 24\pi, 264 + 12\pi$ 15. 4
 16. [2, 4] 17. $k > \frac{1}{2}$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. (本题满分 14 分)

解 (I) $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \cos \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$ 4 分

(II) 因为 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$

当 $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right],$

所以 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$

所以 $f(x)$ 的取值范围为 [1, 2].10 分

19. (本小题满分 15 分)

解 (I) 当 $k=1$ 时, $\frac{|x-1|}{x-2} - k(x-1)^2 = 0,$

所以 $|x-1| \cdot \frac{1-|x-1|(x-2)}{x-2} = 0,$

所以 $|x-1|=0$ 或 $1-|x-1|(x-2)=0,$

所以解 $x=1, x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$ 7 分

(II) 因为 $|x-1| \cdot \left(\frac{1}{x-2} - k|x-1|\right) = 0,$

即 $|x-1|=0$ 或 $\frac{1}{x-2} - k|x-1|=0,$

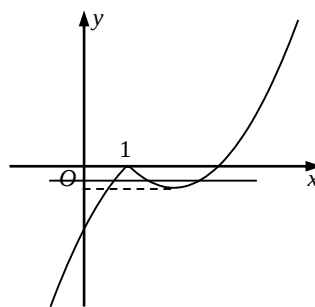
当 $|x-1|=0$ 时, $x=1$, 此时 $k \in \mathbf{R};$

所以 $\frac{1}{x-2} - k|x-1| = 0$ 有三个不等于 1 的解,

即 $\frac{1}{k} = |x-1| \cdot (x-2)$ 有三个不等于 1 的解,

根据函数 $y = |x-1| \cdot (x-2)$ 的图象,

所以 $-\frac{1}{4} < \frac{1}{k} < 0$, 即 $k < -4$8 分



(第 19 题答图)

20. (本题满分 15 分)

解 (I) 由 $AD \perp BC$ 可知, $|DM| = |AM|$, $|DN| = |AN|$,

所以 $\angle MDN = \angle MAN$,

因为 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN} = 12 \cos \angle MAN = -6$,

所以 $\cos \angle MAN = -\frac{1}{2}$,

所以 $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cos \angle MAN = 148$,

所以 $|BC| = 2\sqrt{37}$8 分

(II) 因为 $\frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DB}|} + \frac{\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DC}|} = \frac{1}{2}(|DB| + |DC|) = 5$,

所以 $|BC| = 10$,

所以 $\angle BAC = 90^\circ$7 分

21. (本题满分 15 分)

解: (I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则} \begin{cases} 6a_1 + 15d = 60, \\ a_1(a_1 + 20d) = (a_1 + 5d)^2, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} d = 2, \\ a_1 = 5, \end{cases}$$

$$\therefore a_n = 2n + 3.$$

$$S_n = \frac{n(8 + 2n)}{2} = n(n + 4). \quad \text{.....7 分}$$

(II) 由 $b_{n+1} - b_n = a_n$,

$$\therefore b_n - b_{n-1} = a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*).$$

当 $n \geq 2$ 时,

$$b_n = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \dots + (b_2 - b_1) + b_1$$

$$= a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + b_1$$

$$= (n-1)(n-1+4) + 3 = n(n+2).$$

对 $b_1 = 3$ 也适合,

$$\therefore b_n = n(n+2) (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$\therefore \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right).$$

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3n^2 + 5n}{4(n+1)(n+2)}. \end{aligned} \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

22. (本题满分 15 分)

解: (I) (i) 根据题意, $f'(x) = \frac{2x^2 + ax + 1}{x}$,

所以方程 $2x^2 + ax + 1 = 0$ 有两个正根 t_1, t_2 (不妨设 $t_1 < t_2$),

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{a}{4} > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a < -2\sqrt{2}. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

(ii) 易知 $f(x)$ 在 $x=t_1$ 时取到极大值, 在 $x=t_2$ 时取到极小值.

由 (i) 知 $2t_1^2 + at_1 + 1 = 0$,

所以 $f(t_1) = -t_1^2 + \ln t_1 - 1$.

令 $g(x) = -x^2 + \ln x - 1$, 所以 $g'(x) = \frac{1}{x} - 2x$,

由 $\frac{1}{x} - 2x = 0$, 解得 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $g(x) \leq g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} < 0$,

所以 $f(t_1) < 0$, 故 $f(x)$ 至多只有一个零点.

又 $f(-a) = \ln(-a) > 0$, 可知 $f(x)$ 存在唯一零点. \dots\dots 5 \text{ 分}

(II) 由题意知: $2x_1 + a + \frac{1}{x_1} + 2x_2 + a + \frac{1}{x_2} = 0$,

即 $a = -(x_1 + x_2) - \frac{x_1 + x_2}{2x_1x_2}$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 + a(x_1 - x_2) + \ln \frac{x_1}{x_2}$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} \right) + \ln \frac{x_1}{x_2},$$

设 $t = \frac{x_1}{x_2} \in (1, 2)$, 记 $h(t) = -\frac{t}{2} + \frac{1}{2t} + \ln t$,

则 $h'(t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + 1 \right)^2 \leq 0$,

故 $h(t)$ 单调递增, 所以 $h(t) \in (h(2), h(1))$,

即 $h(t) \in \left(-\frac{3}{4} + \ln 2, 0 \right)$. \dots\dots 7 \text{ 分}