

2015 年杭州市第二次高考科目教学质量检测

数学(理科)参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	C	C	B	B	D	C

二、填空题：本大题共 7 小题，第 9 至 12 题每小题 6 分，第 13 至 15 题每题 4 分，共 36 分.

9. $2x-y=0$, $x+2y=0$, $2\sqrt{5}$ 10. $\sqrt{33}$, $\frac{16}{3}$ 11. $p=2$, $|MF|=4$
 12. $\frac{3m^2}{20}$; -10 13. $[\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ 14. $\frac{5\sqrt{11}}{4}$ 15. 5

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (I) 因为 $\sin A = \sin C + \sin(A-B)$

$$= \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B,$$

所以 $\cos B = \frac{1}{2}$.

根据余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 得

$$(2\sqrt{7})^2 = a^2 + 6^2 - 12a \cos \frac{\pi}{3}, \text{ 即 } a^2 - 6a + 8 = 0,$$

解得: $a=2$ 或 $a=4$.

当 $a=2$ 时, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$;

当 $a=4$ 时, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 6\sqrt{3}$8 分

(II) 当 $a=3 \in [1, 6]$ 时, $\sin C = 1$,

当 $a=1$ 时, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 1 + 36 - 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 31$, $\therefore b = \sqrt{31}$,

于是 $\frac{6}{\sin C} = \frac{\sqrt{31}}{\sin \frac{\pi}{3}}$, 从而: $\sin C = \frac{3\sqrt{93}}{31}$,

当 $a=6$ 时, $\triangle ABC$ 为等边三角形, 则 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 因为 $\frac{3\sqrt{93}}{31} > \frac{\sqrt{3}}{2}$,

从而得 $\sin C$ 的取值范围是 $[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$7 分

17. (I) 取 AB 中点 E , 连接 CE , 则由题意知, $\triangle BCE$ 为正三角形, 所以 $\angle ABC = 60^\circ$.

由等腰梯形知 $\angle BCD = 120^\circ$, 设 $AD = DC = BC = 2$, 则 $AB = 4$, $BD = 2\sqrt{3}$,

故 $AD^2 + BD^2 = AB^2$, 即得 $\angle ADB = 90^\circ$, 所以 $AD \perp BD$.

又因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp BD$.

所以 $BD \perp$ 平面 PAD , 且 $BC \subset$ 平面 PBD ,
 所以平面 $PBD \perp$ 平面 PAD .

.....7 分

(II) **解法一:** 在平面 $ABCD$ 中, 过点 C 作 $CH \parallel BD$ 交 AD 延长线于点 H ,
 由 (1) 知 $BD \perp$ 平面 PAD , 所以 $CH \perp$ 平面 PAD , 从而 $CH \perp PD$.
 在平面 PAD 中, 过点 H 作 $HG \perp PD$ 交 PD 延长线于点 G ,
 连接 CG , 则 $PG \perp$ 平面 HGC , 所以 $PG \perp GC$,
 所以 $\angle HGC$ 即为二面角 $A-PD-C$ 的平面角.

在 $Rt\triangle CHD$ 中, $CD=2$, $\angle CDH=60^\circ$, 所以 $CH=\sqrt{3}$,

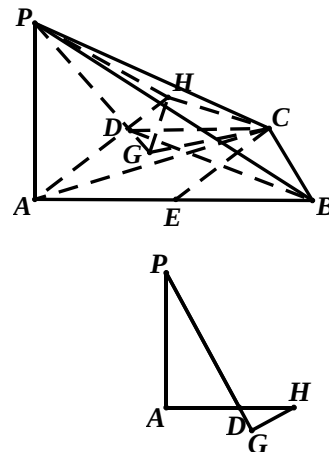
由 $Rt\triangle PAD \sim Rt\triangle HGD$, 得 $GH = \frac{PA \cdot DH}{PD} = \frac{4 \times 1}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

在 $Rt\triangle GHC$ 中, $GC = \sqrt{HG^2 + HC^2} = \sqrt{\frac{4}{5} + 3} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{5}}$,

所以 $\cos \angle GHC = \frac{GH}{GC} = \frac{2\sqrt{19}}{19}$.

所以二面角 $A-PD-C$ 的余弦值为 $-\frac{2\sqrt{19}}{19}$.

.....8 分



方法 2: 建立如图所示的直角坐标系 $D-xyz$, 设 $AD=DC=\frac{1}{2}AB=2$,

则 $D(0,0,0), A(2,0,0), P(2,0,4), B(0,2\sqrt{3},0), C(-1,\sqrt{3},0)$, $\overrightarrow{DP}=(2,0,4), \overrightarrow{DC}=(-1,\sqrt{3},0)$,

则平面 PAD 的法向量 $n_1=(0,1,0)$, 设平面 PDC 的法向量 $n_2=(x,y,z)$.

由 $n_2 \cdot \overrightarrow{DP}=0$ 及 $n_2 \cdot \overrightarrow{DC}=0$, 得 $\begin{cases} x+2z=0 \\ x-\sqrt{3}y=0 \end{cases}$, 令 $z=1$, 取 $n_2=(-2,-\frac{2}{\sqrt{3}},1)$.

设二面角 $A-PD-C$ 的大小为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = -\frac{2\sqrt{19}}{19}$.

18. (I) 依题意可知: $\frac{b}{c} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, 故 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$3 分

(II) 设直线 AB 方程为: $x=ty-c$, 则直线 MN 的方程为: $x=-ty-4c$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_3, y_3), N(x_4, y_4)$,

$$\text{则 } \begin{cases} x=ty-c \\ \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1 \end{cases}, \therefore (3t^2+4)y^2 - 6tcy - 9c^2 = 0, \therefore y_1 \cdot y_2 = \frac{-9c^2}{3t^2+4},$$

$$\text{又 } \begin{cases} x=-ty-4c \\ \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1 \end{cases}, \therefore (3t^2+4)y^2 + 24tcy + 36c^2 = 0, \therefore y_3 \cdot y_4 = \frac{36c^2}{3t^2+4},$$

$$\text{所以 } \frac{|FA| \cdot |FB|}{|PM| \cdot |PN|} = \frac{\sqrt{1+t^2} |y_1| \sqrt{1+t^2} |y_2|}{\sqrt{1+(-t)^2} |y_3| \sqrt{1+(-t)^2} |y_4|} = \frac{|y_1 y_2|}{|y_3 y_4|} = \frac{\frac{9c^2}{3t^2+4}}{\frac{36c^2}{3t^2+4}} = \frac{1}{4}. \dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (I) $a_2 = -1, b_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{2}, b_3 = 0$,4 分

(II) $\because \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2} - a_{k-1} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}, b_{k-1} - \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$,

因此无论是 $a_{k-1} + b_{k-1} \geq 0$ 还是 $a_{k-1} + b_{k-1} < 0$, 都有 $b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$,

即 $\{b_k - a_k\}$ 是以 $b_1 - a_1 = b - a$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

所以 $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n) = 2(b - a)(1 - \frac{1}{2^n})$4 分

(III) $\because b_{k-1} > b_k, \therefore a_{k-1} + b_{k-1} \geq 0, \therefore a_k = a_{k-1}$,

即 $k \in [2, N]$ 时, 恒有 $a_k = a$,

由 (II) 知 $b_k - a_k = (b - a)(\frac{1}{2})^{k-1}, \therefore b_k = a + (b - a)(\frac{1}{2})^{k-1}$,

所以 $a_{k-1} + b_{k-1} = a + a + (b - a)(\frac{1}{2})^{k-2} \geq 0$,

解得: $k \leq 2 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{-2a}{b-a}$.

所以 N 的最大值为 $[2 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{-2a}{b-a}]$ (其中 $[2 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{-2a}{b-a}]$ 表示不超过 $2 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{-2a}{b-a}$ 的最大整数).7 分

20. (I) (i) $f(x) < f(1)$ 即 $f(x) < 0$, 即 $(x-1)(ax+a-b) < 0$.

当 $b > 2a$ 时, 解集为 $(1, \frac{b-a}{a})$;

当 $b < 2a$ 时, 解集为 $(\frac{b-a}{a}, 1)$;

当 $b = 2a$ 时, 解集为 $\emptyset$.

(ii) 因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $\frac{b}{a} > 0$,

① 当 $0 < \frac{b}{2a} < \frac{1}{2}$, 即 $b < a$ 时, $f(0) = b - a < 0 = f(1)$, 不合题意;

② 当 $\frac{b}{2a} \geq \frac{1}{2}$, 即 $b \geq a$ 时, $f(0) = b - a \geq 0 = f(1)$, 符合题意, $\frac{b}{a} \geq 1$.

所以 $\frac{b}{a}$ 的取值范围为 $[1, +\infty)$7 分

(II) 由 $f(x) \leq (x+1)|2b-a|$, 得 $ax^2 - (b+|2b-a|)x - a + b - |2b-a| \leq 0$,

$$\text{即 } x^2 - \left(\frac{b}{a} + \left|2 \cdot \frac{b}{a} - 1\right|\right)x + \frac{b}{a} - 1 - \left|2 \cdot \frac{b}{a} - 1\right| \leq 0,$$

$$\text{令 } t = \frac{b}{a}, \text{ 则 } x^2 - (t + |2t-1|)x + t - 1 - |2t-1| \leq 0,$$

当 $\Delta = (t + |2t-1|)^2 - 4(t-1-|2t-1|) > 0$ 时, 解得

$$\frac{t + |2t-1| - \sqrt{(t + |2t-1|)^2 - 4(t-1-|2t-1|)}}{2} \leq x \leq \frac{t + |2t-1| + \sqrt{(t + |2t-1|)^2 - 4(t-1-|2t-1|)}}{2},$$

$$(1) \text{ 当 } t \geq \frac{1}{2} \text{ 时, } \frac{3t-1-\sqrt{(3t-1)^2+4t}}{2} \leq x \leq \frac{3t-1+\sqrt{(3t-1)^2+4t}}{2},$$

$$\text{又因为 } \frac{3t-1-\sqrt{(3t-1)^2+4t}}{2} < 0, \quad \frac{3t-1+\sqrt{(3t-1)^2+4t}}{2} \geq 1,$$

$$\text{只需要 } m \leq \frac{3t-1+\sqrt{(3t-1)^2+4t}}{2} \text{ 恒成立即可, 即 } m \leq 1.$$

$$(2) \text{ 当 } 0 < t < \frac{1}{2} \text{ 时, } \frac{1-t-\sqrt{(1-t)^2-4(3t-2)}}{2} \leq x \leq \frac{1-t+\sqrt{(1-t)^2-4(3t-2)}}{2},$$

$$\text{显然 } \frac{1-t-\sqrt{(1-t)^2-4(3t-2)}}{2} < 0,$$

$$\text{且 } \frac{1-t+\sqrt{(1-t)^2-4(3t-2)}}{2} = \frac{1-t+\sqrt{t^2-14t+9}}{2} \text{ 在 } (0, \frac{1}{2}) \text{ 上递减, 所以}$$

$$\frac{1-t+\sqrt{t^2-14t+9}}{2} > 1,$$

$$\text{所以只需要 } m \leq \frac{1-t+\sqrt{t^2-14t+9}}{2} \text{ 恒成立, 即 } m \leq 1.$$

综上, m 的最大值为 1.7 分