

2015 年杭州市第一次高考科目教学质量检测

数学(文科)参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	C	B	C	A	D	D

二、填空题：本大题共 7 小题，第 9 至 12 题每小题 6 分，第 13 至 15 题每题 4 分，共 34 分.

9. $\pi, -\sqrt{2}, \left[k\pi + \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{5\pi}{8}\right]$ 10. $\frac{13}{2}, -1$ 11. $2n-9; -10$
12. $y=2x-1; -\frac{3}{2}$ 13. 2 14. 2 15. $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2})$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (本题满分 15 分)

解：(I) 根据倍角公式： $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ，得

$$2\cos^2 A + \frac{1}{2} = 2\cos A, \text{ 即 } 4\cos^2 A - 2\cos A + 1 = 0,$$

$$\text{所以 } (2\cos A - 1)^2 = 0, \text{ 所以 } \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{3}. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 根据正弦定理: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 得 } b = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin B, c = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin C,$$

$$\text{所以 } l = 1 + b + c = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} (\sin B + \sin C).$$

$$\text{因为 } A = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } B + C = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{所以 } l = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} [\sin B + \sin(\frac{2\pi}{3} - B)] = 1 + 2\sin(B + \frac{\pi}{6}).$$

$$\text{因为 } 0 < B < \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } l \in (2, 3]. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

17. (本题满分 15 分)

解：(I) 因为点 B_1 在平面 $ABCD$ 上射影为 O .

所以平面 $AB_1D \perp$ 平面 ACD ，又 $CD \perp AD$ ，

所以 $CD \perp$ 平面 AB_1D ，

所以 $AB_1 \perp CD$ ，

又因为 $AB_1 \perp CB_1$ ，

所以 $AB_1 \perp$ 平面 B_1CD . \dots\dots\dots 7 分

(II) 作 $BF \perp AC$ 交 AC 于 E ，交 AD 于 F ，

$$\text{不妨设 } AB = 1, \text{ 则 } BC = \sqrt{2}, BE = \frac{\sqrt{6}}{2}, EF = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

当点 O 恰好落线段 AD 上时, 点 O 与点 F 重合.

又因为 $B_1E \perp AC$, $EF \perp AC$,

所以 $\angle B_1EF$ 为二面角 B_1-AC-D 的平面角,

$$\text{所以 } \cos \angle B_1EF = \frac{EO}{B_1E} = \frac{1}{2}.$$

即二面角 B_1-AC-D 等于 60° .

..... 15 分

18. (本题满分 15 分)

解: (I) 因为 $S_n = n - a_n$, $S_{n-1} = n - 1 - a_{n-1}$ ($n \geq 2$),

两式相减, 得

$$2a_n = a_{n-1} + 1.$$

$$\text{即 } a_n - 1 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 1),$$

$$\text{又因为 } a_1 = 1 - a_1, \text{ 所以 } a_1 = \frac{1}{2}, \text{ 即 } a_1 - 1 = -\frac{1}{2}.$$

所以数列 $\{a_n - 1\}$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

$$\text{所以 } a_n - 1 = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ 即 } a_n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

..... 8 分

$$(II) \text{ 因为 } b_n = -\frac{a}{2^n} - (2n+1),$$

且 $b_3 > 0$, 所以 $a < -56$, 即 $a < 0$, 所以数列 $\{b_n\}$ 为递减数列.

又因为当且仅当 $n=3$ 时, $|b_n|$ 取到最小值, 所以 $b_4 < 0$, $b_3 < |b_4| = -b_4$,

$$\text{即 } \begin{cases} b_3 > 0, \\ b_4 < 0, \\ b_3 + b_4 < 0. \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{256}{3} < a < -56. \quad \text{..... 15 分}$$

19. (本题满分 15 分)

解: (I) 因为 $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$, 当 $x < 0$ 时, $f(-\frac{2}{3})=-\frac{1}{4}$.

又因为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递增, $(0, \frac{1}{2})$ 上递减, $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上递增,

所以当 $m=0$ 或 $m=-\frac{1}{4}$ 时, 方程 $f(x)=m$ 有两个不同的解.

当 $m=0$ 时, 方程的解为 $0, 1$;

当 $m=-\frac{1}{4}$ 时, 方程的解为 $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$

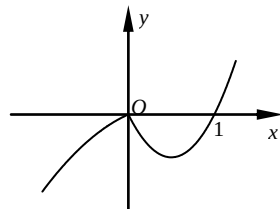
7 分

(II) 由 (I) 可知函数 $f(x)$ 的图象如图所示,

① 当 $0 < b \leq \frac{1}{2}$ 时,

因为

$$f(-b) - f(b) = -\frac{9}{40}b(b+1) - b(b-1)$$



$$= -\frac{1}{40}b(49b-31) > 0.$$

此时函数 $f(x)$ 的值域为 $(b(b-1), 0]$.

② 当 $\frac{1}{2} < b \leq \frac{2}{3}$ 时,

因为 $f(-b) \geq f(\frac{1}{2})$,

此时函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{1}{4}, 0]$.

③ 当 $\frac{2}{3} < b \leq 1$ 时,

因为 $f(-b) < f(\frac{1}{2})$, 且 $f(b) \leq 0$,

此时函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\frac{9}{40}b(b+1), 0]$.

④ 当 $b > 1$ 时,

因为 $f(-b) < f(\frac{1}{2})$, 且 $f(b) > 0$,

此时函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\frac{9}{40}b(b+1), b(b-1))$ 15 分

20. (本题满分 14 分)

解: (I) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

将 $y=x+1$ 代入 $C: x^2=2py$, 得:

$$x^2 - 2px - 2p = 0.$$

则 $x_1x_2 = -2p$.

所以

$$k_1k_2 = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = \frac{x_1x_2}{4p^2} = \frac{-1}{2p} = -\frac{1}{4},$$

所以 $p=2$ 6 分

(II) 设 $E(x_3, y_3)$, $F(x_4, y_4)$, 直线 $m: y=k(x-x_0)+y_0$.

联立抛物线 $C: x^2=4y$, 得

$$x^2 - 4kx + 4kx_0 - 4y_0 = 0, \quad (*)$$

则 $x_3+x_4=4k=2x_0$,

所以 $k=\frac{1}{2}x_0$.

此时 (*) 式为:

$$x^2 - 2x_0x + 2x_0^2 - 4y_0 = 0,$$

所以 $\Delta = (2x_0)^2 - 4(2x_0^2 - 4y_0) = 16y_0 - 4x_0^2$.

所以

$$|EF| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_3-x_4| = \sqrt{1+\frac{x_0^2}{4}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{1 + \frac{x_0^2}{4}} \cdot \sqrt{16y_0 - 4x_0^2} \\
&= \sqrt{(4 + x_0^2) \cdot (4y_0 - x_0^2)}.
\end{aligned}$$

又因为 $x_0^2 + y_0^2 - y_0 = 0$.

所以

$$\begin{aligned}
|EF| &= \sqrt{(4 + y_0 - y_0^2) \cdot (3y_0 + y_0^2)} \\
&\leq \frac{(4 + y_0 - y_0^2) + (3y_0 + y_0^2)}{2} \\
&= 2 + 2y_0 \leq 4 \quad (y_0 \leq 1).
\end{aligned}$$

等号当且仅当

$$\begin{cases} 4 + y_0 - y_0^2 = 3y_0 + y_0^2, \\ y_0 = 1. \end{cases} \text{即 } y_0 = 1 \text{ 取得.}$$

所以 $|EF|$ 的最大值为 4.

..... 14 分