

2020 学年舟山市第一学期期末调研测试卷

高二数学参考答案

一、选择题（每题 4 分，共 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	D	B	D	C	C	A	A	D

二、填空题（多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分）

11. $2\sqrt{2}$, $y = \pm x$ 12. $3\sqrt{2}$, 60° 13. $y = -x + 2$, $2\sqrt{2}$
14. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{4}$ 15. $4\sqrt{3}$ 16. $\frac{1}{2}$ 17. $\left[\frac{1}{16}, \frac{1}{12}\right)$

三、解答题（18 题 14 分，19、20、21、22 各 15 分，共 74 分）

18. (1) 圆 C 可以化为 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$, 3 分
 若点 P 在圆 C 内部, 则 $4 + (a+1)^2 < 8$ 3 分
 解得: $-3 < a < 1$ 7 分

- (2) 当 $a = -2$ 时, 线段 PC 的中点的坐标为 $(1, -\frac{3}{2})$, 9 分

$k_{PC} = \frac{1}{2}$, 11 分

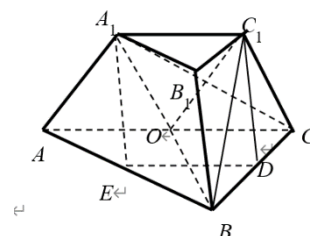
故线段 PC 为的中垂线所在直线的斜率为 -2 , 12 分

所求直线方程为 $2x + y - \frac{1}{2} = 0$ 14 分

19. (1) 证明: 取 AB 中点 E , 连接 $DE, A_1E \Rightarrow DE \parallel \frac{1}{2} AC$ 2 分

又 $\because A_1C_1 \parallel \frac{1}{2} AC \Rightarrow DE \parallel A_1C_1 \Rightarrow \square DEA_1C_1$ 4 分

$\Rightarrow \begin{cases} A_1E \parallel C_1D \\ A_1E \subset \text{平面} ABB_1A_1 \end{cases}$ 又 $\because C_1D \not\subset \text{平面} ABB_1A_1 \Rightarrow C_1D \parallel \text{平面} ABB_1A_1$ 7 分



- (2) 证明: 取 AC 中点 O , 连接 BO, A_1O, C_1O 由 $BC = BA \Rightarrow BO \perp AC$ 9 分

$\because \begin{cases} \text{平面} AA_1C_1C \perp \text{面} ABC \\ \text{平面} AA_1C_1C \cap \text{面} ABC = AC \end{cases} \Rightarrow BO \perp \text{平面} AA_1C_1C \Rightarrow BO \perp A_1C$ 11 分

$\because OC \parallel A_1C_1 \Rightarrow \square A_1C_1CO$ 又 $\because \begin{cases} AC = 2C_1C \\ AC = 2CO \end{cases} \Rightarrow CO = C_1C \Rightarrow \text{菱形} A_1C_1CO$ 13 分

$\Rightarrow \begin{cases} C_1O \perp A_1C \\ BO \perp A_1C \end{cases} \Rightarrow A_1C \perp \text{平面} BOC_1 \Rightarrow A_1C \perp BC_1$ 15 分

20. (1) 圆 $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x - 10 = 0$ 的圆心为 $M(-\sqrt{2}, 0)$, 半径为 $2\sqrt{3}$, 2 分

点 $N(\sqrt{2}, 0)$ 在圆 M 内, $|PM| + |PN| = 2\sqrt{3} > |MN|$, 4 分

所以曲线 E 是 M, N 为焦点, 长轴长为 $2\sqrt{3}$ 的椭圆, 6 分

由 $a = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$, 得 $b^2 = 3 - 2 = 1$, 所以曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 7 分

(2) ① 设 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, $A(0, 1)$, 由已知直线 BC 的斜率存在, 设直线 BC :

$$y = kx + 2, \text{ 联立方程组 } \begin{cases} y = kx + 2, \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 得 } (1+3k^2)x^2 + 12kx + 9 = 0, \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{12k}{1+3k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{9}{1+3k^2}, \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{y_1 - 1}{x_1} \cdot \frac{y_2 - 1}{x_2} = \frac{(kx_1 + 1)(kx_2 + 1)}{x_1 x_2} = \frac{k^2 x_1 x_2 + k(x_1 + x_2) + 1}{x_1 x_2} \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$= \frac{k^2 \cdot \frac{9}{1+3k^2} + k \cdot \left(\frac{-12k}{1+3k^2} \right) + 1}{\frac{9}{1+3k^2}} = \frac{9k^2 - 12k^2 + 3k^2 + 1}{9} = \frac{1}{9} \quad (\text{定值}) \quad \dots\dots 15 \text{ 分}$$

21.

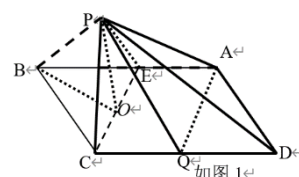
(1) 取 CE 中点 O , 连接 BP, BO, PO $\because AB = 2BC = 2BE$

$\therefore BC = BE = \sqrt{2} \Rightarrow BO \perp CE \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$\therefore \begin{cases} CP = CB \\ EP = EB \end{cases} \Rightarrow PC = PE \Rightarrow PO \perp CE \Rightarrow \angle POB \text{ 就是所求二面角的平面角} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

因为 $\begin{cases} EP = EB = \sqrt{2} \\ \angle PEB = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle PEB \text{ 正三角形} \Rightarrow PB = \sqrt{2} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

又因为等腰 $Rt\triangle BEC \Rightarrow CE = 2 \Rightarrow BO = PO = 1 \Rightarrow BO^2 + PO^2 = BP^2$
 $\Rightarrow \angle POB = 90^\circ$, 所以二面角 $P-EC-B$ 的大小为 $90^\circ \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$



(2) 方法一: 几何法

由于沿 EC 将点 B 折起至点 P , 所以点 P 在底面内的射影必在折痕的垂直平分线上又因为 B, O, Q 三点共线, 二面角 $P-EC-B$ 等于 $120^\circ \Rightarrow \angle POQ = 60^\circ \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$\Rightarrow BO = PO = OQ = 1 \Rightarrow \triangle POQ \text{ 正三角形} \Rightarrow PQ = 1 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$\Rightarrow CQ \parallel EA \Rightarrow \square AQCE \Rightarrow AQ \parallel CE \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$\because CE \perp PO, CE \perp OQ \Rightarrow CE \perp \text{平面} POQ \Rightarrow AQ \perp \text{平面} POQ$

$\Rightarrow \text{平面} PAQ \perp \text{平面} POQ \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$\because CQ = DQ \therefore d_{D-\text{平面} PAQ} = d_{C-\text{平面} PAQ}$ 又 $CE \parallel AQ \therefore d_{O-\text{平面} PAQ} = d_{C-\text{平面} PAQ}$

又因为 $d_{O-\text{平面} PAQ} = h_{O-PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore d_{D-\text{平面} PAQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

又由平行四边形对角线性质得: $2(PC^2 + PD^2) = CD^2 + 4PQ^2 \Rightarrow 2(2 + PD^2) = 8 + 4$

$\Rightarrow PD^2 = 4 \Rightarrow PD = 2$

设 PD 与平面 PAQ 所成角为 θ , 所以 $\sin \theta = \frac{d_{D-\text{平面} PAQ}}{PD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

方法二：向量法

由于沿 EC 将点 B 折起至点 P ，所以点 P 在底面内的射影必在折痕的垂直平分线上，又因为 B, O, Q 三点共线，二面角 $P-EC-B$ 等于 $120^\circ \Rightarrow \angle POQ = 60^\circ$ 8 分

以 O 为原点，分别以 OQ, OE 为 x 轴, y 轴，与它们都垂直的直线为 z 轴。

于是各点坐标如图所示。

$\because \overrightarrow{QD} = \overrightarrow{EA} \Rightarrow \overrightarrow{EA} = (1, 1, 0) \Rightarrow$ 点 A 坐标为 $(1, 2, 0)$ 9 分

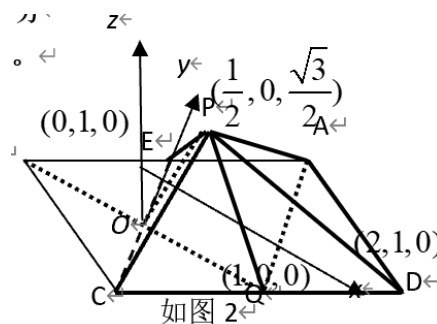
所以 $\overrightarrow{QA} = (0, 2, 0)$ ， $\overrightarrow{QP} = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ $\overrightarrow{DP} = (-\frac{3}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 10 分

设平面 PQA 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{QA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\text{令 } z = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = (\sqrt{3}, 0, 1) \text{13 分}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{DP}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{DP} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{DP}| |\vec{n}|} = \frac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{\frac{9}{4} + 1 + \frac{3}{4}} \cdot \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{15 分}$$



22. 解：(1) 设过点 P 与抛物线相切的直线方程为： $x + 2 = m(y - t)$ 1 分

$$\text{由 } \begin{cases} x + 2 = m(y - t) \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4my + 4(mt + 2) = 0$$

$$\text{因为相切，所以 } \Delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_2 = 2m \\ 16m^2 = 16(mt + 2) \Rightarrow m^2 - tm - 2 = 0 \end{cases} \text{2 分}$$

$$\text{设 } m_1, m_2 \text{ 是该方程的两根，由韦达定理得： } \begin{cases} m_1 + m_2 = t \\ m_1 m_2 = -2 \end{cases}$$

m_1, m_2 分别表示切线 PA, PB 斜率的倒数，且每条切线对应一个切点，所以切点 $A(m_1^2, 2m_1), B(m_2^2, 2m_2)$ 4 分

$$\Rightarrow k_{AB} = \frac{2(m_1 - m_2)}{m_1^2 - m_2^2} = \frac{2}{m_1 + m_2} \text{ 所以直线 } AB \text{ 为： } y = \frac{2}{m_1 + m_2}(x - m_1^2) + 2m_1$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{m_1 + m_2}x + \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{直线 } AB \text{ 方程为： } y = \frac{2}{t}(x - 2)$$

所以 AB 过定点 $(2, 0)$ 6 分

解：(2) 法一

由 (1) 知 $|AB| = \sqrt{(m_1^2 - m_2^2)^2 + 4(m_1 - m_2)^2} = |m_1 - m_2| \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 4}$ 7 分

由 (1) 知点 Q 坐标为 $(2, 0)$, $P(-2, t)$, 所以直线 PQ 方程为: $y = -\frac{t}{4}(x - 2)$ 8 分

即: $tx + 4y - 2t = 0 \Rightarrow d_1 + d_2 = \frac{|tm_1^2 + 8m_1 - 2t|}{\sqrt{t^2 + 16}} + \frac{|tm_2^2 + 8m_2 - 2t|}{\sqrt{t^2 + 16}}$ 9 分

A, B 分居直线两侧 $\Rightarrow d_1 + d_2 = \frac{|t(m_1^2 - m_2^2) + 8(m_1 - m_2)|}{\sqrt{t^2 + 16}} = \frac{|m_1 - m_2| |t(m_1 + m_2) + 8|}{\sqrt{t^2 + 16}}$ 10 分

$$\Rightarrow \frac{|AB|}{d_1 + d_2} = \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 + 4} \sqrt{t^2 + 16}}{|t(m_1 + m_2) + 8|} = \frac{\sqrt{t^2 + 4} \sqrt{t^2 + 16}}{t^2 + 8} = \sqrt{\frac{(t^2 + 16)(t^2 + 4)}{(t^2 + 8)^2}} = \sqrt{1 + \frac{4t^2}{t^4 + 16t^2 + 64}}$$

$$\therefore \frac{|AB|}{d_1 + d_2} = \sqrt{1 + \frac{4}{t^2 + \frac{64}{t^2} + 16}} \leq \sqrt{1 + \frac{4}{32}} = \frac{3}{4} \sqrt{2} \text{ ..当且仅当 } t^2 = 8 \text{14 分}$$

又由 $x + 2 = m(y - t)$, 令 $x = 0$ 得: $C(0, \frac{2}{m_1} + t), D(0, \frac{2}{m_2} + t) \Rightarrow S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times \left| \frac{2}{m_1} - \frac{2}{m_2} \right|$

$$\Rightarrow S_{\triangle PCD} = 2 \left| \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} \right| = |m_1 - m_2| = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2} = \sqrt{t^2 + 8} = 4 \text{15 分}$$

法二

$$\text{因为 } \frac{|AB|}{d_1 + d_2} = \frac{|AB| \cdot |PQ|}{(d_1 + d_2) |PQ|} = \frac{|AB| \cdot d_{P-AB} \cdot |PQ|}{2S_{\triangle PAB} \cdot d_{P-AB}} = \frac{2S_{\triangle PAB} \cdot |PQ|}{2S_{\triangle PAB} \cdot d_{P-AB}} = \frac{|PQ|}{d_{P-AB}} \text{9 分}$$

由 (1) 知点 Q 坐标为 $(2, 0)$, $P(-2, t) \Rightarrow |PQ| = \sqrt{t^2 + 16}$ 10 分

又由 (1) 知直线 AB 方程为: $2x - ty - 4 = 0 \Rightarrow d_{P-AB} = \frac{|-4 - t^2 - 4|}{\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{t^2 + 8}{\sqrt{t^2 + 4}}$ 11 分

$$\frac{|AB|}{d_1 + d_2} = \frac{|PQ|}{d_{P-AB}} = \sqrt{t^2 + 16} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 4}}{t^2 + 8} = \sqrt{\frac{(t^2 + 16)(t^2 + 4)}{(t^2 + 8)^2}} = \sqrt{1 + \frac{4t^2}{t^4 + 16t^2 + 64}}$$

$$\therefore \frac{|AB|}{d_1 + d_2} = \sqrt{1 + \frac{4}{t^2 + \frac{64}{t^2} + 16}} \leq \sqrt{1 + \frac{4}{32}} = \frac{3}{4} \sqrt{2} \text{ 当且仅当 } t^2 = 8 \text{ 取到等号14 分}$$

又由 $x + 2 = m(y - t)$, 令 $x = 0$ 得: $C(0, \frac{2}{m_1} + t), D(0, \frac{2}{m_2} + t) \Rightarrow S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times \left| \frac{2}{m_1} - \frac{2}{m_2} \right|$

$$\Rightarrow S_{\triangle PCD} = 2 \left| \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} \right| = |m_1 - m_2| = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2} = \sqrt{t^2 + 8} = 4 \text{15 分}$$