

2015 年高三第二次教学质量检测

参考答案及评分标准（文科）

一、选择题（本大题共有 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	D	C	A	C	A	B

二、填空题（本大题共 7 小题，第 9 至 12 每题 6 分，13 至 15 题每题 4 分，共 36 分）

9. $(2,3)$; $(-3,4)$; $(-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$ 10. $\sqrt[3]{4}$; $n^2 - n$

11. π ; $\left(k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right) (k \in \mathbb{Z})$ 12. 2 ; $3 + 2\sqrt{2}$

13. $(-\infty, \sqrt{2} + 1]$ 14. $\frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{2}$ 15. 6

三、解答题（本大题共 5 小题，共 74 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

16. （本小题满分 15 分）

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$, $\cos B = \frac{1}{3}$.

（I）求 $\sin C$ 的值；

（II）求 $\triangle ABC$ 的面积 S .

解析：（I）因为 $\cos B = \frac{1}{3}$ ，所以 $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，-----3 分

因为 $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$ ，且 $AC = 2\sqrt{2}$ ， $AB = 2$ ，-----5 分

所以 $\sin C = \frac{AB \cdot \sin B}{AC} = \frac{2}{3}$ -----7 分

（II）因为 $\sin C = \frac{2}{3}$ ， $\cos B = \frac{1}{3}$ ，（因为 $AC > AB$ ，所以 $\cos C = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ）

所以 $\sin(B+C) = \frac{2\sqrt{10}}{9} + \frac{2}{9}$ 或 $\sin(B+C) = -\frac{2\sqrt{10}}{9} + \frac{2}{9}$ （舍去），-----10 分

所以 $\sin A = \frac{2\sqrt{10}}{9} + \frac{2}{9}$ 因为 $AB = 2$ ， $AC = 2\sqrt{2}$ ，-----13 分

因为 $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ -----14 分

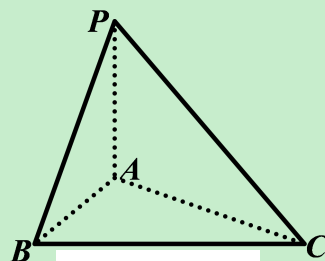
所以 $S = \frac{8\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}{9}$. -----15 分

17. (本小题满分 15 分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=1$, $PB=PC=BC=2$, $AB=AC=\sqrt{3}$.

(I) 求证: $PA \perp$ 平面 ABC ;

(II) 求直线 PB 与平面 PAC 所成角的正弦值.

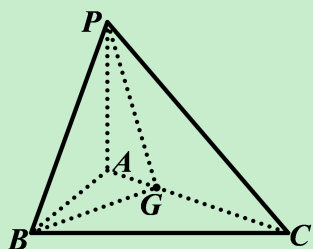


(第 17 题图)

(I) 证明: 由已知, $PA^2 + AB^2 = PB^2$, $PA \perp AB$, -----2 分

同理, $PA \perp AC$, 又 $AB \cap AC = A$, -----4 分

所以 $PA \perp$ 面 ABC , -----6 分



(II) 解法 1, 在 $\triangle ABC$ 中, 过 B 作 $BG \perp AC$, 垂足是 G ,

连 PG , -----8 分

因为 $PA \perp$ 面 ABC , 所以面 $PAC \perp$ 面 ABC ,

所以 $BG \perp$ 面 PAC , -----10 分

所以 $\angle BPG$ 是直线 PB 与面 PAC 所成的角,

-----12 分

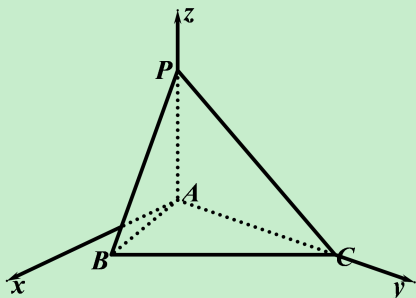
在 $\triangle ABC$, 解得 $BG = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $AG = \frac{\sqrt{3}}{3}$, -----13 分

所以 $PG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 在 $\triangle PBG$ 中, $\cos \angle BPG = \frac{\sqrt{3}}{3}$, -----14 分

即直线 PB 与面 PAC 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. -----15 分

(II) 解法 2, 如图, 以 A 为原点, AC 所在直线为 y 轴, AP 所在直线为 z 轴建立空间

直角坐标系, 由已知条件得,



$$A(0,0,0), B\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right),$$

$$C(0, \sqrt{3}, 0), P(0,0,1), \quad \text{-----8 分}$$

$$\overrightarrow{PB} = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right), \quad \text{-----10 分}$$

因为 x 轴 $\perp$ 面 PAC , 故 PAC 的法向量 $\vec{n} = (1,0,0)$, -----12 分

设求直线 PB 与面 PAC 所成角的大小为 α , 则 $\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{PB} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{PB}| \cdot |\vec{n}|}$, -----14 分

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad \text{-----15 分}$$

(针对其他建系方法: 建系、标出点的坐标 2 分, 求出法向量、 $\overrightarrow{PB}$ 一个 2 分共 4 分, 向量公式 2 分, 结论 1 分)

18. (本小题满分 15 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1 = a$ ($a \neq 3$), $a_{n+1} = S_n + 3^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(I) 设 $b_n = S_n - 3^n$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 并写出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $a_{n+1} > a_n$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, 求实数 a 的取值范围.

解: (I) 由 $a_{n+1} = S_n + 3^n$ 得: $S_{n+1} - S_n = S_n + 3^n$, ----- 2 分

$$\text{即 } S_{n+1} = 2S_n + 3^n, \text{ 所以 } S_{n+1} - 3^{n+1} = 2(S_n - 3^n),$$

$$\text{即 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2, \quad \text{-----4 分}$$

$$\text{又 } b_1 = S_1 - 3 = a - 3 \neq 0,$$

$\{b_n\}$ 是首项为 $a-3$ ，公比为 2 的等比数列，-----5 分

$$\text{且 } b_n = S_n - 3^n = (a-3) \cdot 2^{n-1} \quad \text{----- 7 分}$$

(II) 由 (I) 知 $S_n - 3^n = (a-3) \cdot 2^{n-1}$,

$$\therefore S_n = (a-3) \cdot 2^{n-1} + 3^n \quad \text{-----8 分}$$

$$\therefore a_{n+1} = S_n + 3^n = (a-3) \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 3^n \quad \text{-----9 分}$$

$$\therefore a_n = (a-3) \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot 3^{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \text{-----10 分}$$

由 $a_{n+1} > a_n$ ，得 $a_{n+1} - a_n > 0$ ，

$$\text{代入后解得: } \frac{3-a}{8} < \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad (n \geq 2) \text{ 恒成立.} \quad \text{----- 12 分}$$

$$\text{因为 } n \geq 2, \text{ 所以 } \frac{3-a}{8} < \frac{3}{2}, \text{ 解得 } a > -9, \quad \text{----- 13 分}$$

$$\text{而当 } n=1 \text{ 时, } \because a_2 = a+3, \therefore a_{n+1} - a_n = a_2 - a_1 = 3 > 0. \quad \text{----- 14 分}$$

综上所述, $a \in (-9, 3) \cup (3, +\infty)$ ----- 15 分

19. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = 3x^2 - 2tx - 1$ ， $x \in [-1, 1]$ ， $t \in R$ 。

(I) 若 $t \in [0, 3]$ ，求 $f(x)$ 的值域；

(II) 求证: $|f(x)| \leq \max\{f(-1), f(1)\}$ 。

解: (I) 解: 因为 $t \in [0, 3]$ ，所以 $x = \frac{t}{3} \in [0, 1]$ ，-----1 分

$$\text{所以, 当 } x = \frac{t}{3} \text{ 时, } f(x)_{\min} = -\frac{t^2}{3} - 1, \quad \text{-----2 分}$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } f(x)_{\max} = 2 + 2t, \quad \text{-----3 分}$$

所以 $f(x)$ 的值域是 $\left[-\frac{t^2}{3}-1, 2+2t\right]$. -----4 分

(II)证明: 设 $x_0 = \frac{t}{3}$ 为 $f(x)$ 对称轴,

此时 $|f(x_0)| = \frac{3+t^2}{3}$, $f(1) = 2-2t$, $f(-1) = 2+2t$.

原命题等价于 $|f(x)|_{\max} \leq \max\{f(-1), f(1)\}$. -----5 分

(1)当 $-1 \leq x_0 \leq 1$ 即 $-3 \leq t \leq 3$, 此时 $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| = \max\{|f(x_0)|, |f(-1)|, |f(1)|\}$

(i) 当 $-3 \leq t \leq 0$ 时, 此时 $|f(1)| = f(1)$

因为 $f(1) - f(-1) = -4t \geq 0$, 所以 $\max\{f(-1), f(1)\} = f(1)$. -----6 分

又 $|f(1)|^2 - |f(-1)|^2 = -8t \geq 0$, 所以 $|f(1)| \geq |f(-1)|$, -----7 分

$$|f(x_0)| = \frac{3+t^2}{3} \leq |f(1)| = f(1) \Leftrightarrow t^2 + 6t - 3 \leq 0$$

因为 $-3 \leq t \leq 0$, 不等式 $t^2 + 6t - 3 \leq 0$ 恒成立. 故

于是有 $|f(x)|_{\max} = \max_{-1 \leq x \leq 1} \{|f(x_0)|, |f(-1)|, |f(1)|\} = f(1) = \max\{f(-1), f(1)\}$

-----8 分

(ii)当 $0 < t \leq 3$ 时, 此时 $|f(-1)| = f(-1)$

因为 $f(1) - f(-1) = -4t < 0$, 所以 $\max\{f(-1), f(1)\} = f(-1)$. -----9 分

又 $|f(1)|^2 - |f(-1)|^2 = -8t < 0$, 所以 $|f(1)| < |f(-1)|$, -----10 分

$$|f(x_0)| \leq |f(-1)| = f(-1) \Leftrightarrow t^2 - 6t - 3 \leq 0$$

因为 $0 < t \leq 3$, 不等式 $t^2 - 6t - 3 \leq 0$ 恒成立. 故

于是有 $|f(x)|_{\max} = \max_{-1 \leq x \leq 1} \{|f(x_0)|, |f(-1)|, |f(1)|\} = f(-1) = \max\{f(-1), f(1)\}$

-----11 分

(2) 当 $x_0 < -1$ 即 $t < -3$. 于是有 $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| =$

$$\max\{|f(-1)|, |f(1)|\} = \max\{|2-2t|, |2+2t|\} = 2+2t = f(1) = \max\{f(-1), f(1)\}.$$

-----13 分

(3) 当 $x_0 > 1$ 即 $t > 3$. 于是有 $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| =$

$$\max\{|f(-1)|, |f(1)|\} = \max\{|2+2t|, |2-2t|\} = 2+2t = f(-1) = \max\{f(-1), f(1)\}.$$

综合 1), 2), 3), 有 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 有 $|f(x)| \leq \max\{f(-1), f(1)\}$. ----15 分

说明:①(II)若学生将命题转化为“ $|f(x)|_{\max} \leq \max\{f(-1), f(1)\}$ ”给 1 分; ②(II)中参考答案的解法共分三大类, 若学生有分类思想的, 给 2 分; 若分四小类正确者再给 2 分. 其它情况解法酌情给分.

20. (本小题满分 14 分)

设抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点是 F , 已知 $P(2, m)$ 是抛物线 C 上一点,

且 $|PF| = 4$.

(I) 求 p 和 m 的值;

(II) 设过点 $Q(3, 2)$ 的直线 l_1 与抛物线 C 相交于 A, B 两点, 经过点 F 与直线 l_1 垂直

的直线 l_2 交抛物线 C 于 M, N 两点. 若 $|MN|$ 是 $|QA|, |QB|$ 的等比中项, 求 $|MN|$.

解: (I) 由已知, $|PF| = 2 + \frac{p}{2} = 4$ -----2 分

$$p = 4, \text{ -----3 分}$$

又 $m^2 = 16$, 所以 $m = \pm 4$. -----4 分

(II) 设 $l_1: x = m(y-2) + 3$ ($m \neq 0$), 则 $l_2: x = -\frac{1}{m}y + 2$, -----5 分

由 $\begin{cases} y^2 = 8x \\ x = m(y-2) + 3 \end{cases}$ 得, $y^2 - 8my + 16m - 24 = 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$$y_1 + y_2 = 8m, y_1 \cdot y_2 = 16m - 24, \text{ -----7 分}$$

$$\text{故 } |QA| \cdot |QB| = (1+m^2)|y_1-2||y_2-2| = 20(1+m^2), \text{ -----9 分}$$

由 $\begin{cases} y^2 = 8x \\ x = -\frac{1}{m}y + 2 \end{cases}$ 得, $my^2 + 8y - 16m = 0$, 设 $M(x_3, y_3), N(x_4, y_4)$, 则

$$y_3 + y_4 = -\frac{8}{m}, y_3 \cdot y_4 = -16,$$

$$\text{故 } |MN|^2 = \left(1 + \frac{1}{m^2}\right) |y_3 - y_4|^2 = \frac{64(1+m^2)^2}{m^4}, \text{ -----11 分}$$

$$\text{由已知 } 20(1+m^2) = \frac{64(1+m^2)^2}{m^4}, \text{ 化简得, } 5m^4 - 16m^2 - 16 = 0, \text{ 解得, } m^2 = 4,$$

-----13 分

$$\text{所以 } |MN| = 10. \text{ -----14 分}$$