

2018 年杭州市高一年级教学质量检测

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 15 小题，每小题 3 分，共 45 分。在每个小题给出的四个选项中，有且仅有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	A	B	B	C	B	B	C	D
11	12	13	14	15					
C	B	C	A	C					

二、填空题：本大题共 8 小题，每空 3 分，共 36 分。

16. 2 17. 4, 31 18. -4 19. $\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{4}{3}$
20. (2, 0) 21. $\pi, \left(-\frac{5}{12}\pi + k\pi, \frac{1}{12}\pi + k\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$ 22. $\frac{\pi}{6}$
23. 2, $-\frac{3}{2}$

三、解答题：本大题共 2 小题，共 19 分，要求写出详细的推证和运算过程。

24. (本小题满分 9 分)

解 (I) 因为 $f(x) = 2\sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x$

$$= \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x - \sqrt{3}$$

$$= 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3},$$

所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$4 分

(II) 因为 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$,

所以当 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, $f(x)_{\max} = f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$;

当 $2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$, 即 $x = 0$ 时, $f(x)_{\min} = f(0) = -2\sqrt{3}$,

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[-2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}]$5 分

25. (本小题满分 10 分)

解 (I) 当 $n=1$ 时, $2S_1 = a_1 \cdot a_2 = 2a_1$, 得 $a_2 = 2$;

当 $n=2$ 时, $2S_2 = a_2 \cdot a_3 = 2(a_1 + a_2)$, 得 $a_3 = 3$;

当 $n \geq 2$ 时, $\begin{cases} 2S_n = a_n a_{n+1}, \\ 2S_{n-1} = a_{n-1} a_n \end{cases}$,

两式相减, 得 $2=a_{n+1}-a_{n-1}$.

所以 $a_{2n-1}=2n-1$, $a_{2n}=2n$,

即 $a_n=n$ (当 $n=1$ 时也适合).5 分

(II) (i) 由 (I) 得 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

所以 $T_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$1 分

(ii) 因为 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$, 所以 $\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

所以 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$.

先证: $2^n\geq n+1$.

设 $F(n)=2^n-(n+1)$,

因为 $F(n+1)-F(n)=2^n-1\geq 1>0$,

所以函数 $F(n)$ 在 $\mathbf{N}^*$ 上单调递增,

所以 $F(n)\geq F(1)=0$, 即 $2^n\geq n+1$.

所以 $\frac{1}{n+1}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 即 $2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\leq 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$,

即 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}\leq 2T_n$ ($n\in\mathbf{N}^*$).4 分