

2017 年杭州市高一年级教学质量检测

数学试题参考答案及评分标准

一. 选择题: (本大题共 15 小题, 每小题 3 分, 共 45 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	C	C	D	A	D	D	C	B
11	12	13	14	15					
B	C	B	C	C					

二. 填空题: (本大题共 8 小题, 每空 3 分, 共 36 分)

16. 4π ; 3; $\frac{\pi}{5}$ 17. 2 18. $\frac{2}{3}$ 19. $-\left(\frac{1}{3}\right)^x + x$
20. $\frac{7}{25}$ 21. 1; $\frac{\sqrt{15}}{4}$ 22. 6; {7,9,10,12,16} 23. $[-4,0]$

三. 解答题: 本大题共 2 小题, 共 19 分, 要求写出详细的推证和运算过程

24. (本小题满分 9 分)

解: (1) 由题意得: $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$.

$$\text{所以 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right) \quad (k \in \mathbf{Z})$4 分

(2) 由 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 得 $2x - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$,

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)_{\max} = 3$;

当 $x = -\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)_{\max} = \frac{3}{2}$5 分

25. (本小题满分 10 分)

解: (1) 当 $a \leq 0$ 时,

因为 $a(x+1) = |x^2 - 2ax| \geq 0$, 得 $x_4 \leq -1$.

(i) 当 $x \leq 2a$ 时,

因为 $y = x^2 - 3ax - a$ 的对称轴为 $x = \frac{3}{2}a \geq 2a$,

所以方程 $x^2 - 3ax - a = 0$ 有且仅有一解;

(ii) 当 $2a \leq x \leq 0$ 时,

由 $a \leq 0$ 得方程 $x^2 - ax + a = 0$ 有且仅有一解.

所以方程 $f(x) = ax + a$ 至多只有两解, 不符合题意.

所以 $a > 0$.

所以方程 $x^2 - ax + a = 0$ 有两个不同的实数解,

所以 $a^2 - 4a > 0$,

解得 $a > 4$.

.....5 分

(2) 证明: 因为 x_4 是方程 $x^2 - 3ax - a = 0$ 的解,

$$\text{得 } x_4^2 - 3ax_4 - a = 0, \text{ 即 } a = \frac{x_4^2}{3x_4 + 1}.$$

因为 $a > 4$, 所以 $x_4 > 6 + 2\sqrt{10}$.

$$\text{法一: } f(x_4) = x_4^2 - 2ax_4 = ax_4 + a = a(x_4 + 1)$$

$$> 4 \cdot (6 + 2\sqrt{10} + 1) = 28 + 8\sqrt{10}$$

$$> \frac{76}{3} + 8\sqrt{10};$$

$$\text{法二: } f(x_4) = x_4^2 - 2ax_4 = x_4^2 - 2 \cdot \frac{x_4^2}{3x_4 + 1} \cdot x_4$$

$$> \frac{1}{3}x_4^2 > \frac{76}{3} + 8\sqrt{10}.$$

.....5 分