

# 2016 年杭州市第二次高考科目教学质量检测

## 文科数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | C | D | C | B | B | B | A |

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

9.  $2, \sqrt{3}$       10.  $\pi, (k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}), k \in \mathbb{Z}$       11.  $\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{1}{6}$   
 12.  $[0,1], [0,2]$       13.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       14. 4      15.  $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty)$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本题满分 14 分)

解：(I) 当  $m=3$  时，根据正弦定理 由  $3\sin A = \sin B + \sin C$ ，得  $3a = b + c$ 。

根据余弦定理，得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - \left(\frac{b+c}{3}\right)^2}{2bc} \geq \frac{7}{9}.$$

所以  $\cos A$  的最小值为  $\frac{7}{9}$ ，当且仅当  $b=c$  时等号成立. ....7 分

(II) 当  $A = \frac{\pi}{3}$  时， $\frac{\sqrt{3}}{2}m = \sin B + \sin C = \sin B + \sin(\frac{\pi}{3} + C) = \sqrt{3} \sin(B + \frac{\pi}{6})$ ,

所以  $m = 2\sin(B + \frac{\pi}{6})$ .

又因为  $B \in (0, \frac{2\pi}{3})$ ，所以  $B + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ ,

所以  $\sin(B + \frac{\pi}{6}) \in (\frac{1}{2}, 1]$ ,

所以  $m \in (1, 2]$ . ....7 分

17. (本题满分 15 分)

解：(I) 取  $A_1C$  中点  $H$ ，连接  $HE$ ， $HF$ 。

则  $HF \parallel A_1A$ ， $HF = \frac{1}{2}A_1A$ ，故  $EB \parallel HF$  且  $EB = HF$ ，

所以四边形  $EBFH$  为平行四边形，

故  $BF \parallel EH$ ，且  $EH \subset$  平面  $A_1EC$ ， $BF \not\subset$  平面  $A_1EC$ ，

所以  $BF \parallel$  平面  $A_1EC$ . ....7 分

(II) 设  $AB$  中点为  $G$ ，连接  $EG$ ， $CG$ 。

因为  $CG \perp AB$ ， $CG \perp AA_1$ ，

所以  $CG \perp$  平面  $BAA_1B_1$ ,

所以  $CG \perp EA_1$ , 且  $EC = A_1E = \sqrt{6}$ ,  $A_1C = 2\sqrt{3}$ ,

所以  $A_1E^2 + EC^2 = A_1C^2$ ,

所以  $EC \perp EA_1$ .

所以  $EA_1 \perp$  平面  $EGC$ ,

所以  $EG \perp EA_1$ ,

所以  $\angle GEC$  为二面角  $C-EA_1-A$  的平面角, 且  $EG = GC = \sqrt{3}$ ,  $EC = \sqrt{6}$ ,

所以  $\angle GEC = 45^\circ$ . .....8 分

18. (本题满分 15 分)

(I) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 由  $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$ , 因为  $d \neq 0$ ,

所以  $d = a$ ,  $a_n = n$ ,  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ . .....7 分

(II) 因为  $\frac{1}{S_n} = 2(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ , 所以  $B_n = 2(1 - \frac{1}{n+1})$ ,

因为  $a_{2^{n-1}} = 2^{n-1}$ , 所以  $T_n = 2(1 - \frac{1}{2^n})$ ,

所以  $T_n + \frac{1}{2^{n-1}} = 2$ ,

所以  $B_n < T_n + \frac{1}{2^{n-1}}$ . .....8 分

19. (本题满分 15 分)

解: (I) 根据题意, 即方程  $|x^2 - a| = ax + 1$  有四个不同解.

若  $a \leq 0$ , 则方程  $x^2 - a = ax + 1$  至多两个根, 不符合要求.

若  $a > 0$ , 则  $y = x^2 - a$  与  $y = ax + 1$  两图有象四个不同交点.

(i) 当  $y = ax + 1$  与  $y = -x^2 + a$  相切时

解之得  $a = -2 \pm 2\sqrt{2}$  (负值舍去).

(ii) 当  $y = ax + 1$  过点  $(-\sqrt{a}, 0)$  时, 解得  $a = 1$ .

所以  $a \in (2\sqrt{2} - 2, 1)$ . .....7 分

(II).

(i) 当  $a \leq 1$  时,  $f(x) = x^2 - ax - a - 1 = (x - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} - a - 1$ ,  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递增,

则  $f(x)_{\min} = f(1) = -2a$ ;

(ii) 当  $1 < a < 4$  时,

$$f(x) = \begin{cases} -(x + \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4} + a - 1, & (1 \leq x \leq \sqrt{a}) \\ (x - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} - a - 1, & (\sqrt{a} < x \leq 2) \end{cases}.$$

易知  $f(x)$  在  $[1, \sqrt{a}]$  上单调递减, 在  $(\sqrt{a}, 2]$  上单调递增, 故  $f(x)_{\min} = f(\sqrt{a}) = -a\sqrt{a} - 1$ .

(iii) 当  $a \geq 4$ ,  $f(x) = -(x + \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4} + a - 1$ ,

故  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递减, 则  $f(x)_{\min} = f(2) = -a - 5$ .

综上所述,  $g(a) = \begin{cases} -2a, & (a \leq 1) \\ -a\sqrt{a} - 1, & (1 < a < 4) \\ -a - 5, & (a \geq 4) \end{cases}$  ..... 8 分

## 20. (本题满分 15 分)

(I) 由抛物线的定义, 得  $|MF| = x_0 + \frac{p}{2}$ , 又  $|MF| = \frac{5}{4}x_0$ ,

所以  $x_0 = 2p$ , 即  $M(2p, 4)$ ,

代入  $y^2 = 2px$ , 得  $p = 2$  (−2 舍去)

所以抛物线 E 的方程  $y^2 = 4x$ . ..... 6 分

(II) 由题意可知, 直线  $l$  的斜率存在, 且不等于 0, 故设  $l$  的方程为  $y = k(x - 1)$  ( $k \neq 0$ ),  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ ,  $D(x_4, y_4)$ ,

联立  $y = k(x - 1)$  与  $y^2 = 4x$ , 得  $k^2x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0$ ,

则  $x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 4}{k^2}$ ,  $y_1 + y_2 = \frac{4}{k}$ ,

设  $AB$  中点为  $P$ , 则  $P(\frac{k^2 + 2}{k^2}, \frac{2}{k})$ ,

所以  $|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{4(k^2 + 1)}{k^2}$ ,

又  $l'$  的斜率为  $-\frac{1}{k}$ , 方程为  $y - \frac{2}{k} = -\frac{1}{k}(x - \frac{k^2 + 2}{k^2})$ ,

即  $x = -ky + \frac{2}{k^2} + 3$ ,

联立直线  $l'$  的方程和抛物线  $y^2 = 4x$ , 得  $y^2 + 4ky - 4(3 + \frac{2}{k^2}) = 0$ ,

则  $y_3 + y_4 = -4k$ ,  $y_3y_4 = -4(3 + \frac{2}{k^2})$ ,

所以  $x_3 + x_4 = \frac{4k^4 + 6k^2 + 4}{k^2}$ ,

所以  $CD$  的中点  $Q$  的坐标为  $(\frac{2k^4 + 3k^2 + 2}{k^2}, -2k)$ ,

$$\text{所以 } |CD| = \sqrt{1+k^2} |y_3 - y_4| = \frac{4(k^2+1)\sqrt{k^2+2}}{|k|}, \quad |PQ| = \frac{2(k^2+1)\sqrt{k^2+1}}{|k|},$$

因为  $AC \perp AD$ ,

$$\text{所以 } |AQ| = \frac{1}{2} |CD|, \quad \frac{1}{4} |AB|^2 + |PQ|^2 = \frac{1}{4} |CD|^2,$$

解得  $k = \pm 1$ ,

故所求直线  $l$  的方程为  $x - y - 1 = 0$  或  $x + y - 1 = 0$ . ..... 9 分