

2016 年杭州市第二次高考科目教学质量检测

理科数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	C	A	A	B	A	A

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

9. $2, (\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, 0), (k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}), k \in \mathbb{Z}$ 10. $\frac{8}{3}, 6 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
 11. $\frac{2}{3}$ 12. $[0, 2]$ 13. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 14. $-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}$ 15. $\frac{4}{3}, \frac{\sqrt{59}}{6}$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本题满分 14 分)

解：(I) 当 $m=3$ 时，根据正弦定理 由 $3\sin A = \sin B + \sin C$ ，得 $3a = b + c$ 。

根据余弦定理，得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - (\frac{b+c}{3})^2}{2bc} \geq \frac{7}{9}.$$

所以 $\cos A$ 的最小值为 $\frac{7}{9}$ ，当且仅当 $b=c$ 时等号成立.7 分

(II) 当 $A = \frac{\pi}{3}$ 时， $\frac{\sqrt{3}}{2}m = \sin B + \sin C = \sqrt{3} \sin(B + \frac{\pi}{6})$,

所以 $m = 2\sin(B + \frac{\pi}{6})$.

又因为 $B \in (0, \frac{2\pi}{3})$ ，所以 $B + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$,

所以 $\sin(B + \frac{\pi}{6}) \in (\frac{1}{2}, 1]$,

所以 $m \in (1, 2]$7 分

17. (本题满分 15 分)

解：(I) 取 A_1C 中点 H ，连接 HG ， EH 。

所以 $HG \parallel A_1A$ ， $HG = \frac{1}{2}A_1A$ ，

又 E 为 BB_1 的中点，

所以 $BE \parallel HG$ ， $BE = HG$ ，

所以四边形 $EHGB$ 为平行四边形，

故 $BG \parallel EH$ ，

又 $EH \subset$ 平面 A_1EC ， $BG \not\subset$ 平面 A_1EC ，

所以 $BG \parallel$ 平面 A_1EC6 分

(II) 以 F 为坐标原点建立空间直角坐标系, 设 $AA_1=a$.

则 $F(0,0,0)$, $A_1(-1,0,a)$, $E(1,0,\frac{a}{2})$, $C(0,\sqrt{3},0)$,

所以 $\overrightarrow{FE}=(1,0,\frac{a}{2})$, $\overrightarrow{FC}=(0,\sqrt{3},0)$, $\overrightarrow{A_1E}=(2,0,-\frac{a}{2})$, $\overrightarrow{A_1C}=(1,\sqrt{3},-a)$,

设平面 ECF 法向量为 $\mathbf{m}=\vec{m}=(x,y,z)$,

则由 $\overrightarrow{FE} \cdot \mathbf{m}=0$ 及 $\overrightarrow{FC} \cdot \mathbf{m}=0$, 得
$$\begin{cases} x+\frac{a}{2}z=0 \\ \sqrt{3}y=0 \end{cases},$$

不妨取 $\mathbf{m}=(-a,0,2)$; 类似的, 可取平面 A_1EC 法向量为 $\mathbf{n}=(a,\sqrt{3}a,4)$.

设二面角 A_1-EC-F 的平面角为 θ ,

则 $\cos\theta=\cos\langle\mathbf{m},\mathbf{n}\rangle=\frac{8-a^2}{\sqrt{a^2+4}\cdot\sqrt{4a^2+16}}$,

当 $a=2\sqrt{2}$ 时, $\cos\theta=0$, 即 $\theta=90^\circ$9 分

18. (本题满分 15 分)

解: (I) 因为 $a_1=1$ 及 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}(n\geq 1)$,

所以 $a_n\geq 1$,

所以 $0<\frac{1}{a_n^2}\leq 1$.

因为 $a_{n+1}^2=(a_n+\frac{1}{a_n})^2=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2$,

所以 $a_{n+1}^2-a_n^2=\frac{1}{a_n^2}+2\in(2,3]$, 即 $2\leq a_{n+1}^2-a_n^2\leq 3$8 分

(II) 由 (I) 得 $2n< a_{n+1}^2-a_1^2\leq 3n$,

所以 $2n+1< a_{n+1}^2\leq 3n+1$,

即 $2n-1< a_n^2\leq 3n-2(n\geq 2)$, 当 $n=1$ 时, 也满足,

所以 $2n-1\leq a_n^2\leq 3n-2$.

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{1}{a_n^2}\in[\frac{3n+1}{3n-2},\frac{2n}{2n-1}]$7 分

19. (本题满分 15 分)

解: 设直线 l 方程为 $y=kx+b$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$.

联立 $y=kx+b$ 和 $x^2=2y$,

得 $x^2-2kx-2b=0$,

则 $x_1+x_2=2k$, $x_1x_2=2b$, $\Delta=4k^2+8b>0$.

由 $OA \perp OB$, 所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$, 得 $b=2$.

联立 $y=kx+2$ 和 $3x^2+4y^2=12$, 得

$$(3+4k^2)x^2+16kx+4=0,$$

$$\text{所以 } x_3+x_4=-\frac{16k}{3+4k^2}, \quad x_3x_4=\frac{4}{3+4k^2},$$

$$\text{由 } \Delta_2=192k^2-48>0, \text{ 得 } k^2>\frac{1}{4}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(I) \text{ 因为 } k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}=k, \quad k_3+k_4=\frac{y_3}{x_3}+\frac{y_4}{x_4}=-6k,$$

$$\text{所以 } \frac{k_1+k_2}{k_3+k_4}=-\frac{1}{6}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 根据弦长公式 $|CD|=\sqrt{1+k^2}|x_3-x_4|$, 得:

$$|CD|=4\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{4k^2-1}}{3+4k^2},$$

$$\text{根据点 } O \text{ 到直线 } CD \text{ 的距离公式, 得 } d=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}|CD|\cdot d=4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{4k^2-1}}{3+4k^2},$$

$$\text{设 } \sqrt{4k^2-1}=t>0, \text{ 则 } S_{\triangle OCD}=\frac{4\sqrt{3}t}{t^2+4}\leq\sqrt{3},$$

$$\text{所以当 } t=2, \text{ 即 } k=\pm\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ 时, } S_{\triangle OCD} \text{ 有最大值 } \sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

20. (本题满分 15 分)

解: (I) 当 $b=-2$ 时, $f(x)=x+\frac{1}{x+2}+c$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数,

$$\text{所以 } g(1)=|\frac{4}{3}+c|, \quad g(-1)=|c|,$$

$$\text{所以 } M=\max\{g(1), g(-1)\}=\begin{cases} |c|, (c\leq-\frac{2}{3}); \\ |\frac{4}{3}+c|, (c\geq-\frac{2}{3}). \end{cases} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) ① 当 $b \leq -2$ 时,

$$\text{因为 } M \geq g(1) = \left| 1 + \frac{1}{b+1} + c \right|, \quad M \geq g(-1) = \left| 1 + \frac{1}{1-b} - c \right|,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } 2M &\geq g(1) + g(-1) = \left| 1 + \frac{1}{b+1} - c \right| + \left| 1 + \frac{1}{1-b} + c \right| \\ &\geq \left| 2 + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{1-b} \right| = \left| 2 + \frac{2}{1-b^2} \right| \geq \frac{4}{3}. \quad \text{所以 } M \geq \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

② 当 $-2 < b \leq -\sqrt{2}$ 时, 有 $f(b+1) < f(-1) < f(1)$,

$$\text{则 } M = \max\{g(1), g(b+1)\} = \max\left\{\left| 1 + \frac{1}{1-b} + c \right|, |2+b+c|\right\}$$

$$\begin{aligned} 2M &\geq g(b+1) + g(1) = \left| 1 + \frac{1}{1-b} + c \right| + |2+b+c| \\ &\geq \left| 1 + \frac{1}{b-1} + b \right| \geq 2\sqrt{2} - 2. \quad \text{所以 } M \geq \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

③ 当 $-\sqrt{2} < b \leq -1$ 时, 有 $f(b+1) < f(1) < f(-1)$,

$$\text{则 } M = \max\{g(-1), g(b+1)\} = \max\left\{\left| -1 + \frac{1}{-1-b} + c \right|, |2+b+c|\right\},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } 2M &\geq g(b+1) + g(-1) = \left| -1 + \frac{1}{-1-b} + c \right| + |2+b+c| \\ &\geq \left| 3 + \frac{1}{b+1} + b \right| \geq 2\sqrt{2} - 2. \quad \text{所以 } M \geq \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

综上所述, 对任意的 b, c 都有 $M \geq \sqrt{2} - 1$9 分