

2016 年杭州市第一次高考科目教学质量检测

理科数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. B 2. A 3. D 4. A 5. B 6. C 7. B 8. B

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分.

9. 5

10. $-\ln 3, 1-e$

11. 2, 0

12. (2,2), $x+y=0$

13. $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}$

14. 12

15. $\frac{4}{3}$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (本题满分 15 分)

证明 (1) 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

$$\text{得 } (1+\sqrt{3})\sin C = 2\sin B,$$

$$\text{又因为 } 2\sin B = 2\sin\left(\frac{5\pi}{6} - C\right) = \cos C + \sqrt{3}\sin C,$$

$$\text{所以 } \sin C = \cos C, \text{ 即 } C = \frac{\pi}{4}; \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } \vec{CB} \cdot \vec{CA} = \frac{\sqrt{2}}{2}ab, \text{ 所以 } ab = \sqrt{2}(1+\sqrt{3}).$$

$$\text{由正弦定理得 } \sqrt{2}a = c,$$

$$\text{由余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

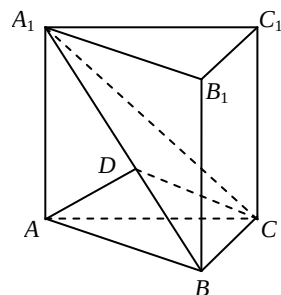
$$\begin{aligned} \text{得 } c^2 &= a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab \\ &= \frac{1}{2}c^2 + \frac{(1+\sqrt{3})^2}{4}c^2 - 2(1+\sqrt{3}) \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{2}c^2 - 2(1+\sqrt{3}), \end{aligned}$$

$$\text{解得 } c = 2,$$

$$\text{所以 } a = \sqrt{2}, b = 1 + \sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

17. (本题满分 15 分)

(I) 证明 过点 A 在平面 A_1ABB_1 内作 $AD \perp A_1B$ 于 D,
因为面 $A_1BC \perp$ 面 A_1ABB_1 , 面 $A_1BC \cap$ 面 $A_1ABB_1 = A_1B$,
所以 $AD \perp$ 面 A_1BC ,
又因为 $BC \subset$ 平面 A_1BC ,
所以 $AD \perp BC$.
因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC ,



(第 17 题图)

所以 $AA_1 \perp BC$.

又因为 $AA_1 \cap AD = A$,

所以 $BC \perp$ 侧面 A_1ABB_1 ,

又因为 $AB \subset$ 面 A_1ABB_1 ,

故 $AB \perp BC$8 分

(II) 连 CD , 由 (I) 知 $\angle ACD$ 是直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角,

又 $\angle ABA_1$ 是二面角 A_1-BC-A 的平面角.

设 $\angle ACD = \theta$, $\angle ABA_1 = \varphi$.

在 $Rt\triangle ADC$ 中, $\sin\theta = \frac{AD}{AC}$, 在 $Rt\triangle ADB$ 中, $\sin\varphi = \frac{AD}{AB}$.

由 $AB < AC$,

得 $\sin\theta < \sin\varphi$, 又 $0 < \theta, \varphi < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\theta < \varphi$7 分

18. (本题满分 15 分)

解: (I) 因为 $a_1 = \frac{1}{2}$, 且 $a_{n+1} - a_n = a_n^2 + 1 > 0$,

所以 $a_n > 0$,

由条件得: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_n + \frac{1}{a_n} + 1 \geq 3$7 分

(II) 由 (I) 得 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{3}$, 即 $\frac{1}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a_n}$,

所以 $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a_1} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{a_1}$,

$= \frac{1}{a_1} (1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}) = 3(1 - \frac{1}{3^n}) < 3$8 分

19. (本题满分 15 分)

解: (I) 设 $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(x, y)$, 则 $\overrightarrow{BA} = (a, -b)$, $\overrightarrow{AC} = (x-a, y)$.

所以 $\begin{cases} x-a = \lambda a \\ y = -\lambda b \end{cases}$, 消去 a, b , 得

点 C 的轨迹 Γ 为: $\frac{x^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$6 分

(II) 设点 E, F, K 的横坐标分别为 x_E, x_F, x_K , 设点 $D(s, t)$,

则直线 PQ 的方程为: $\frac{s}{(\lambda+1)^2}x + \frac{t}{\lambda^2}y = 1$.

设直线 m 的方程: $y=kx+b$, 所以 $t=ks+b$.

$$\text{计算得 } x_K = \frac{1 - \frac{t}{\lambda^2} b}{\frac{s}{(\lambda+1)^2} + \frac{t}{\lambda^2} k}.$$

将直线 m 代入椭圆方程, 得 $(\frac{k^2}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda+1)^2})x^2 + \frac{2kb}{\lambda^2}x + \frac{b^2}{\lambda^2} - 1 = 0$,

$$\text{所以 } x_E + x_F = \frac{-2kb}{\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2} + k^2}, \quad x_E x_F = \frac{b^2 - \lambda^2}{\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2} + k^2},$$

$$\text{所以 } \frac{|DK|}{|DE|} + \frac{|DK|}{|DF|} = \frac{|x_D - x_k|}{|x_D - x_E|} + \frac{|x_D - x_k|}{|x_D - x_F|}$$

$$\begin{aligned} &= \left| s - \frac{1 - \frac{t}{\lambda^2} b}{\frac{s}{(\lambda+1)^2} + \frac{t}{\lambda^2} k} \right| \cdot \frac{|2x_D - (x_F + x_E)|}{|x_D^2 - x_D(x_F + x_E) + x_F x_E|} \\ &= 2. \end{aligned}$$

.....9 分

20. (本题满分 14 分)

解: (1) 因为 $a+2b+c=0$, $c>b>a$,

所以 $a<0$, $c>0$.

又因为 $-a-2b>b>a$,

所以 $-\frac{1}{3} < \frac{b}{a} < 1$;

又因为函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=-a$ 有交点.

所以方程 $ax^2+2bx+c+a=0$ 有实根, 即

$$\Delta = 4b^2 - 4a(c+a) = 4b^2 + 8ab \geq 0,$$

所以 $4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 8 \cdot \frac{b}{a} \geq 0$, 知 $\frac{b}{a} \leq -2$ 或 $\frac{b}{a} \geq 0$,

综上所述可得 $0 \leq \frac{b}{a} < 1$;

.....7 分

(2) 因为点 A 与点 D 、点 B 与点 C 关于对称轴对称,

设 $|AB|=|CD|=m$, $|BC|=n$,

因为线段 AB , BC , CD 能构成钝角三角形,

$$\text{所以 } \begin{cases} m+m>n \\ m^2+m^2<n^2 \end{cases}, \text{ 得 } n<2m<\sqrt{2}n,$$

故 $2n<2m+n<(\sqrt{2}+1)n$,

所以 $2|BC|<|AD|<(\sqrt{2}+1)|BC|$.

设 x_1, x_2 是方程 $ax^2+2bx+c+a=0$ 的两根,

$$\text{则 } |BC| = \sqrt{4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 8 \cdot \frac{b}{a}}.$$

设 x_3, x_4 是方程 $ax^2+2bx+c-a=0$ 的两根,

所以 $|AD| = \sqrt{4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 8 \cdot \frac{b}{a} + 8}$.

所以 $2\sqrt{4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 8 \cdot \frac{b}{a}} < \sqrt{4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 8 \cdot \frac{b}{a} + 8} < (\sqrt{2} + 1)\sqrt{4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 8 \cdot \frac{b}{a}},$

解之得 $-1 + \sqrt[4]{2} < \frac{b}{a} < -1 + \frac{\sqrt{15}}{3}$7 分