

2016学年第二学期杭州市高三年级教学质量检测

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	B	C	D	A	A	A	B	C

二、填空题（本大题共 7 小题，第 11-14 题，每小题 6 分，15-17 每小题 4 分，共 36 分）

11. $y = \pm \sqrt{2}x; \sqrt{3}$ 12. 6; 240 13. 1, $\frac{1}{2}$

14. 40 15. 14 16. 4

17. $2\sqrt{3}$

三、解答题：（本大题共 5 小题，共 74 分）

18. （本题满分 14 分）

解：（I）因为 $f(x) = 2\cos x(\cos x + \sqrt{3}\sin x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1$.

$\therefore 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \therefore k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6},$

$\therefore$ 函数 $y = f(x)$ 的单调递增区间为： $(k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6})$ ($k \in \mathbb{Z}$);7 分

（II） $\because x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $\therefore 2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$,

$\therefore \sin(2x + \frac{\pi}{6}) \in [-\frac{1}{2}, 1]$,

$\therefore f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1$ 的最大值是 3.7 分

19. （本题满分 15 分）

解：如图，设 E 为 AB 的中点，建立如图所示的空间直角坐标系.

（I）当 $\theta = 90^\circ$ 时， $A(2, -1, 0)$, $C(0, 1, 2)$,

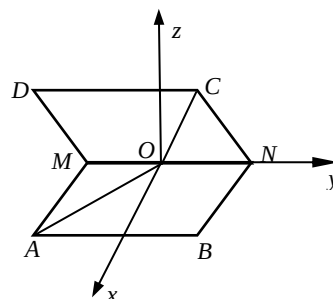
$\therefore \overrightarrow{OA} = (2, -1, 0)$, $\overrightarrow{OC} = (0, 1, 2)$,

$\therefore \cos \angle AOC = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}|} = -\frac{1}{5}$6 分

（II）由 $\theta = 60^\circ$ 得 $C(1, 1, \sqrt{3})$, $D(1, -1, \sqrt{3})$, $M(0, -1, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{MD} = (1, 0, \sqrt{3})$,

设 $\overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{MD} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = (\lambda, -1, \sqrt{3}\lambda)$,



$$\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (\lambda - 2, 0, \sqrt{3}\lambda),$$

设平面 AOC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, $\because \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OA} = 0, \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OC} = 0,$

$$\therefore \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \mathbf{n} = (1, 2, -\sqrt{3}),$$

由题意, 得 $\frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AP}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{14}}{7}$, 即 $3\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$,

$$\therefore \lambda = \frac{1}{3} \text{ 或 } \lambda = 3 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore \text{在线段 MD 上存在点 P, 且 } MP = \frac{1}{3}MD = \frac{2}{3}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

20. (本题满分 15 分)

解: (I) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$,

$$\because f'(x) = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}, \text{ 当 } f'(x) \geq 0 \text{ 时, 解得 } x \leq 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0)$ 上单调递减,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(1) = f(-1) = \sqrt{2}, \quad f(x)_{\max} = f(0) = 2,$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的值域为 } [\sqrt{2}, 2]. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 设 } h(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + \frac{1}{4}x^2 - 2, \quad x \in [0, 1], \quad h(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \because h'(x) &= -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x, \\ &= \frac{1}{2}x \left[1 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \right] \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{2+2\sqrt{1-x^2}} \leq 2,$$

$$\therefore h'(x) \leq 0.$$

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 又 $h(0) = 0$,

$$\therefore h(x) \leq h(0) = 0,$$

$$\therefore f(x) \leq 2 - \frac{1}{4}x^2. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

21. (本题满分 15 分)

解: (I) 设点 $B(x_B, y_B)$, 直线 AB 的方程为 $y = k(x+2)$, 联立 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 得,

$$(3+4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0,$$

$$\therefore -2x_B = \frac{16k^2 - 12}{3 + 4k^2}, \text{ 即 } x_B = \frac{-8k^2 + 6}{3 + 4k^2},$$

$$\therefore y_B = k(x_B + 2) = \frac{12k}{3 + 4k^2}, \text{ 即 } B\left(\frac{-8k^2 + 6}{3 + 4k^2}, \frac{12k}{3 + 4k^2}\right) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(II) 易知 $F_2(1,0)$, $k_{BF_2} = \frac{4k}{1 - 4k^2}$, $k_{BF_1} = -\frac{1}{k}$,

所以直线 BF_2 , CF_1 方程分别为 $y = \frac{4k}{1 - 4k^2}(x - 1)$, $y = -\frac{1}{k}(x + 1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = -\frac{1}{k}(x + 1) \\ y = \frac{4k}{1 - 4k^2}(x - 1) \end{cases}, \text{ 解得 } C(8k^2 - 1, -8k), \text{ 代入 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

得 $192k^4 + 208k^2 - 9 = 0$, 即 $(24k^2 - 1)(8k^2 + 9) = 0$, 得 $k^2 = \frac{1}{24}$,

所以 $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{12}$. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}

22. (本题满分 15 分)

证明: (I) 由题意知 $a_{n+1} - a_n \leq a_{n+2} - a_{n+1}$, 设 $d_i = a_{i+1} - a_i$ ($i = 1, 2, \dots, 504$),

则 $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots \leq d_{504}$, 且 $d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{504} = 2016$,

$$\therefore \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_5}{5} \leq \frac{d_6 + d_7 + \dots + d_{504}}{409} = \frac{2016 - (d_1 + d_2 + \dots + d_5)}{409},$$

所以 $d_1 + d_2 + \dots + d_5 \leq 20$,

$$\therefore a_6 = a_1 + (d_1 + d_2 + \dots + d_5) \leq 21. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(II) 若存在 $k \in \mathbf{N}^*$, 使得 $a_k < a_{k+1}$, 则由 $a_{n+1} \leq \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$,

$$\text{得 } a_{k+1} \leq a_k - a_{k+1} + a_{k+2} \leq a_{k+2},$$

因此, 从 a_n 项开始, 数列 $\{a_n\}$ 严格递增, 故

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq a_k + a_{k+1} + \dots + a_n \geq (n - k + 1)a_k,$$

对于固定的 k , 当 n 足够大时, 必有 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 1$, 与题设矛盾, 所以 $\{a_n\}$ 不可能递增, 即只能 $a_n - a_{n+1} \geq 0$.

$$\text{令 } b_k = a_k - a_{k+1}, \quad (k \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{由 } a_k - a_{k+1} \geq a_{k+1} - a_{k+2}, \text{ 得 } b_k \geq b_{k+1}, \quad b_k > 0,$$

$$\text{故 } 1 \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n = (b_1 + a_2) + a_2 + \dots + a_n = b_1 + 2(b_2 + a_3) + a_3 + \dots + a_n,$$

$$= \dots = b_1 + 2b_2 + \dots + nb_n + na_n \geq (1 + 2 + \dots + n)b_n = \frac{n(n+1)}{2}b_n,$$

$$\text{所以 } b_n \leq \frac{2}{n(n+1)},$$

综上, 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $0 \leq a_n - a_{n+1} \leq \frac{2}{n(n+1)}$. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}