

2017 年杭州市高二年级教学质量检测

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：（本大题共 18 小题，每小题 3 分，共 54 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答案	B	B	D	C	A	C	D	A	D
题号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
答案	B	D	C	C	D	C	D	C	D

二、填空题（本大题共 4 小题，每空 3 分，共 15 分）

19. $(0,1)$; $y=-1$ 20. $\frac{7}{2}$ 21. $\frac{30}{31}$ 22. $\frac{3}{4}$

三、解答题（本大题共 3 小题，共 31 分）

23.（本题 10 分）

解：（1）由已知得 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$,

所以 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\alpha \cos\frac{\pi}{6} + \sin\alpha \sin\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}+4}{10}$. …5 分

（2）因为 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\alpha + \frac{1}{2} \sin\alpha$,

所以 $f(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\alpha \cos\alpha + \frac{1}{2} \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \sin(2\alpha - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{4}$,

因为 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $2\alpha - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$,

所以 $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{6}) \in [-\frac{1}{2}, 1]$.

所以 $f(\alpha)$ 的值域是 $[0, \frac{3}{4}]$. …5 分

24.（本题 10 分）

证明：（1）设 AE 切圆于 M , 直线 $x=4$ 与 x 轴的交点为 N , 则 $EM=EB$,

所以 $|EA| + |EB| = |AM|$

$$= \sqrt{AP^2 - PM^2} = \sqrt{AP^2 - PB^2}$$

$$= \sqrt{AN^2 - BN^2} = 4 \quad (\text{为定值}); \quad \text{…4 分}$$

（2）同理 $|FA| + |FB| = 4$,

所以点 E, F 均在椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上,

设直线 EF 的方程为 $x=my+1$ ($m \neq 0$), 则 $Q(4, \frac{3}{m})$,

直线与椭圆方程联立得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,

设 $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$, 则 $y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}, y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$,

因为 E, B, F, Q 在同一条直线上,

所以 $|EB| \cdot |FQ| = |BF| \cdot |EQ|$ 等价于 $-y_1 \cdot \frac{3}{m} + y_1y_2 = y_2 \cdot \frac{3}{m} - y_1y_2$,

所以 $2y_1y_2 = (y_1+y_2) \cdot \frac{3}{m}$ (*)

因为 $y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}, y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$,

所以 (*) 式成立, 即 $|EB| \cdot |FQ| = |BF| \cdot |EQ|$6 分

25. (本题 10 分)

解: (1) 因为 $f(x) \cdot g(x) = a(x+b)\sqrt{1-x^2}$, ($x \in [-1, 1]$)

① 当 $b=0$ 时, $f(-x) \cdot g(-x) = -ax\sqrt{1-x^2} = f(-x)$

② 当 $b < 0$ 时, 因为

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot g\left(-\frac{1}{2}\right) \neq f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right); \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot g\left(-\frac{1}{2}\right) \neq -f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right),$$

所以 $f(x) \cdot g(x)$ 为非奇非偶函数. ...4 分

(2) 当 $b=0$ 时, 任取 x_1, x_2 , 满足 $-1 < x_1 < x_2 < 1$,

则 $1+x_1x_2 > 0, (1-x_1^2)(1-x_2^2) > 0$.

因为 $y(x_1) - y(x_2) = \frac{a(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)} < 0$,

所以 $y(x_1) < y(x_2)$, 即函数在 $(-1, 1)$ 上单调递增. ...3 分

(3) $h(x) = |-ax^2 - x + a - b|$, 对称轴 $x = -\frac{1}{2a} \leq -\frac{1}{2}$.

① 当 $-1 \leq -\frac{1}{2a} \leq -\frac{1}{2}$, 即 $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ 时,

$$h(x)_{\max} = \max\{h(1), h(-1), h(-\frac{1}{2a})\} = a + \frac{1}{4a} - b = 2,$$

所以 $a+b = 2a + \frac{1}{4a} - 2 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$;

② $-\frac{1}{2a} < -1$, 即 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时,

$$h(x)_{\max} = \max\{h(1), h(-1)\} = 1 - b = 2,$$

所以 $b = -1$,

所以 $a+b = a-1 \in (-1, -\frac{1}{2})$;

综上 $a+b \in (-1, \frac{1}{4}]$4 分