

2017 学年第一学期杭州市高三年级教学质量检测

数学试题参考答案及评分标准

选择题部分（共40分）

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	A	B	C	A	D	A	C	D

非选择题部分（共 110 分）

二、填空题（本大题共 7 小题，第 11-14 题，每小题 6 分，15-17 每小题 4 分，共 36 分）

11. 2, 1

12. $p; \frac{1}{4}$

13. $\frac{\sqrt{5}}{5}; 2$

14. $\frac{\sqrt{3}}{3}; 3+\sqrt{6}$

15. -2

16. 36

17. (-1,2)

三、解答题：（本大题共 5 小题，共 74 分）

18.（本题满分 14 分）

解（I）因为

$$f(x) = a \cdot b + 1 = 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 2\cos^2 x + 1$$

$$= 2\sin(2x - \frac{\pi}{6}),$$

故 $f(x)$ 的最小正周期为 π7 分

（II）若方程 $f(x) = |t^2 - t|$ 无解，则 $|t^2 - t| > f(x)_{\max} = 2$,

所以 $t^2 - t > 2$ 或 $t^2 - t < -2$,

由 $t^2 - t > 2$ 解得 $t > 2$ 或 $t < -1$;

由 $t^2 - t + 2 = (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0$, 故不等式 $t^2 - t < -2$ 无解,

所以 $t > 2$ 或 $t < -1$7 分

19.（本题满分 15 分）

解（I）因为 $\angle BAC = \angle BAD = 60^\circ$, $AC = AD$,

所以 $\triangle ABD \cong \triangle ABC$,

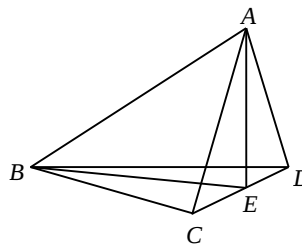
所以 $BC = BD$,

取 CD 的中点 E , 连接 AE , BE ,

所以 $AE \perp CD$, $BE \perp CD$,

所以 $CD \perp$ 平面 ABE , 又 $AB \subset$ 平面 ABE ,

所以 $CD \perp AB$7 分



(II) 在 $\triangle ABD$ 中, 根据余弦定理, 得

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos 60^\circ = 7,$$

所以 $BD = \sqrt{7}$, 又因为 $DE = 1$, 所以 $BE = \sqrt{6}$, $AE = \sqrt{3}$,

所以 $AB^2 = BE^2 + AE^2$, 即 $AE \perp BE$2 分

方法一:

设 CD 到平面 ABD 的距离为 h , CD 与平面 ABD 所成的角为 α ,

因为 $V_{A-BCD} = V_{C-ABD}$, 即 $\frac{1}{3}CD \cdot S_{\triangle ABE} = \frac{1}{3}h \cdot S_{\triangle ABD}$,

$$\text{所以 } h = \frac{CD \cdot S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{所以 } \sin \alpha = \frac{h}{CD} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

所以 CD 与平面 ABD 所成的角正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$6 分

方法二:

则以 AE 为 z 轴, BE 为 x 轴, CE 为 y 轴, 建立坐标系, 则 $A(0, 1, 0)$, $B(0, -1, 0)$, $C(0, 0, \sqrt{3})$, $D(\sqrt{6}, 0, 0)$.

所以 $\overrightarrow{CD} = (0, -2, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{6}, 0, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AD} = (0, -1, -\sqrt{3})$.

设平面 ABD 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \sqrt{6}x - \sqrt{3}z = 0 \\ -y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \mathbf{m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}, 1\right),$$

$$\text{则 } \cos \langle \overrightarrow{CD}, \mathbf{m} \rangle = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

即 CD 与平面 ABD 所成的角正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$6 分

20. (本题满分 15 分)

解 (I) 原不等式等价于 $x^4 - x^3 - x + 1 \geq 0$,

设 $g(x) = x^4 - x^3 - x + 1$,

所以 $g'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1 = (x-1)(4x^2 + x + 1)$,

当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

又因为 $g(x)_{\min} = g(1) = 0$, 所以 $g(x) \geq 0$,

所以 $f(x) \geq -x^2 + x + 1$8 分

(II) 当 $x \in [-1, 0]$ 时, $f(x) \geq ax + 2$ 恒成立, 即 $a \geq \frac{-2x}{1+x^2}$ 恒成立.

当 $x=0$ 时, $\frac{-2x}{1+x^2}=0$;

当 $x \in [-1, 0)$ 时, 而 $\frac{-2x}{1+x^2} = \frac{2}{\frac{1}{-x} + (-x)} \leq \frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{-x} \cdot (-x)}} = 1$,

所以 $a \geq 1$7 分

21. (本题满分 15 分)

解 (I) 联立方程 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 和 $y = kx + m$, 得

$$(2+3k^2)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 6 = 0,$$

所以 $\Delta = (6km)^2 - 4(2+3k^2)(3m^2-6) > 0$,

所以 $m^2 < 2+3k^2$,

所以 $2+3k^2 > 3$, 即 $k^2 > \frac{1}{3}$,

解得 $k > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k < -\frac{\sqrt{3}}{3}$7 分

(II) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{-6km}{2+3k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{3m^2-6}{2+3k^2}$,

设直线 OA , OB 的斜率 k_1 , k_2 , 因为直线 OA , AB , OB 的斜率成等比数列,

所以 $k_1 k_2 = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = k^2$, 即 $\frac{(kx_1 + m)(kx_2 + m)}{x_1 x_2} = k^2$,

化简, 得 $2+3k^2 = 6k^2$, 即 $k^2 = \frac{2}{3}$.

因为 $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{\frac{5}{3} \left(6 - \frac{3}{2} m^2 \right)}$,

原点 O 到直线 AB 的距离 $h = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{\frac{3}{5}} |m|$,

所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot h = \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{\frac{3}{2} m^2 \left(6 - \frac{3}{2} m^2 \right)} \leq \frac{\sqrt{6}}{6} \times \frac{\frac{3}{2} m^2 + \left(6 - \frac{3}{2} m^2 \right)}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

当 $m = \pm\sqrt{2}$ 时, 直线 OA 或 OB 的斜率不存在, 等号取不到,

所以 $S \in \left(0, \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$8 分

22. (本题满分 15 分)

解 (I) 整理得 $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{a_n} - 1$,

因为 $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{a_n} - 1 \geq 2\sqrt{2} - 1 > 1$, 故 $a_n > 1$4 分

(II) 又因为 $a_{n+1} - 2 = a_n + \frac{2}{a_n} - 3 = \frac{(a_n - 2)(a_n - 1)}{a_n}$,

因为 $a_n > 1$, 所以 $a_{n+1} - 2$ 与 $a_n - 2$ 同号,

所以 $a_{n+1} - 2$ 与 $a_1 - 2$ 同号,

因为 $a_1 > 2$, 所以 $a_{n+1} > 2$,

那么 $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{a_n} - 1 < 0$, 则 $a_{n+1} < a_n$,

所以 $2 < a_{n+1} < a_n$5 分

(III) 由 (II) 知 $a_{n+1} - 2 = \frac{(a_n - 2)(a_n - 1)}{a_n}$, 故 $\frac{a_{n+1} - 2}{a_n - 2} = 1 - \frac{1}{a_n}$,

因为 $2 < a_{n+1} < a_1$, 所以 $\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{a_1} = \frac{2}{3}$,

故 $\frac{1}{2} \leq \frac{a_{n+1} - 2}{a_n - 2} \leq \frac{2}{3}$,

所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq a_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,

不等式三边同时求和, 得

$$2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq S_n - 2n \leq 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right),$$

所以 $2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq S_n - 2n \leq 3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$6 分