

2015 年杭州市第二次高考科目教学质量检测

数学(文科) 参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	C	D	B	A	D

二、填空题：本大题共 7 小题，第 9 至 12 题每小题 6 分，第 13 至 15 题每小题 4 分，共 34 分.

9. $(-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$, $m \geq 0$, $m \leq -3$ 10. $-\frac{1}{3}$; $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $-\frac{7}{9}$
11. $x+2y=0$, $2\sqrt{5}$ 12. -1 和 0 , $(0, 4]$
13. -3 14. 144 15. $[\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (I) 因为 $\sin A = \sin C + \sin(A-B)$

$$= \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B,$$

$$\text{所以 } \cos B = \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{3}; \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(II) 根据余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 得

$$(2\sqrt{7})^2 = a^2 + 6^2 - 12a \cos \frac{\pi}{3}, \text{ 即 } a^2 - 6a + 8 = 0,$$

解得: $a=2$ 或 $a=4$.

$$\text{当 } a=2 \text{ 时, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3};$$

$$\text{当 } a=4 \text{ 时, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 6\sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

17. (I) 取 AB 中点 E , 连接 CE , 则由题意知, $\triangle BCE$ 为正三角形, 所以 $\angle ABC = 60^\circ$.

由等腰梯形知 $\angle BCD = 120^\circ$, 设 $AD = DC = BC = 2$, 则 $AB = 4$, $BD = 2\sqrt{3}$,

故 $AD^2 + BD^2 = AB^2$, 即得 $\angle ADB = 90^\circ$, 所以 $AD \perp BD$.

又因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp BD$.

所以 $BD \perp$ 平面 PAD , 且 $BC \subset$ 平面 PBD ,

所以平面 $PBD \perp$ 平面 PAD . \dots\dots\dots 7 分

(II) 在平面 $ABCD$ 中, 过点 C 作 $CH \parallel BD$ 交 AD 延长线于点 H ,

由 (I) 知 $BD \perp$ 平面 PAD , 所以 $CH \perp$ 平面 PAD , 连接 PH , 则 $\angle CPH$ 即为所求的角.

在 $\text{Rt}\triangle CHD$ 中, $CD=2$, $\angle CDH=60^\circ$, 所以 $CH=\sqrt{3}$.

在 $\text{Rt}\triangle PAC$ 中, $PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$.

所以在 $\text{Rt}\triangle PHC$ 中, $\sin \angle CPH=\frac{CH}{PC}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

即 PC 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$8 分

$$18. (I) b_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases} = \begin{cases} 6 & (n=1) \\ 2n+4 & (n \geq 2) \end{cases} = 2n+4 \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $a_4=b_{14}=32$, $a_6=b_{126}=256$,

得 $q^2=\frac{a_6}{a_4}=8$, 即 $q=2\sqrt{2}$ (负值舍去).

所以 $a_n=a_4 \cdot q^{n-4}=32 \cdot (\sqrt{2})^{3n-12}=(\sqrt{2})^{3n-2}$,

所以 $c_n=\log_{\sqrt{2}} a_n=3n-2 (n \in \mathbf{N}^*)$8 分

(II) 由 (I) 知, $c_{b_n}=3(2n+4)-2=6n+10$, 所以 $\{c_{b_n}\}$ 是以 16 为首项, 6 为公差的等差数列.

同理, $c_{c_n}=3(3n-2)-2=9n-8$, $\{c_{c_n}\}$ 是以 1 为首项, 9 为公差的等差数列.

所以 $P_n=c_{b_1}+c_{b_2}+\dots+c_{b_n}=\frac{n(16+6n+10)}{2}=3n^2+13n$,

$$Q_n=c_{c_1}+c_{c_2}+\dots+c_{c_n}=\frac{n(1+9n-8)}{2}=\frac{9}{2}n^2-\frac{7}{2}n.$$

所以 $P_n-Q_n=-\frac{3}{2}n(n-11)$.

故当 $n \leq 10$ 时, $P_n > Q_n$; 当 $n=11$ 时, $P_n=Q_n$; 当 $n \geq 12$ 时, $P_n < Q_n$7 分

19. (I) 由条件知 $\frac{p}{2}=1$, 即 $p=2$, 所以抛物线的方程为 $y^2=4x$;3 分

(II) 设动直线 l 方程为: $x=ty+b$ (显然 $t \neq 0$), 则点 $B(-1, \frac{-1-b}{t})$,

则 $\begin{cases} x=ty+b \\ y^2=4x \end{cases}$, 联列得: $y^2=4(ty+b)$,

所以 $\Delta=16t^2+16b=0$, 得 $b=-t^2$, 故可设点 A 坐标为 $(t^2, 2t)$,

设 $D(m, n)$, 则 $\overrightarrow{AD} = (m-t^2, n-2t)$, $\overrightarrow{BD} = (m+1, n+\frac{1+b}{t})$,

因为 D 在以 AB 为直径的圆上, 所以 $AD \perp BD$,

所以 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, 即 $(m-t^2, n-2t) \cdot (m+1, n+\frac{1+b}{t}) = 0$.

化简整理, 得

$$(1-m)t^2 - 3nt + \frac{n}{t} + (m^2 + m + n^2 - 2) = 0,$$

所以当且仅当 $m=1, n=0$ 时, 上式对任意 $t \in \mathbf{R}$ 恒成立,

即存在 $D(1,0)$, 使得以 AB 为直径的圆恒过点 D12 分

20. (I) 因为 $f(x) = (x - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} - a$,

当且仅当 $-\frac{a^2}{4} - a < 0$ 时, 存在实数 x 使 $f(x) < 0$,

解得 $a < -4$ 或 $a > 0$4 分

(II) 记函数 $g(x) = |f(x)| = |(x - \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} - a|$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 $M(a)$.

(1) 当 $\frac{a}{2} \leq 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上递增, 且 $f(0) = -a \geq 0$,

所以当 $x \in [0, 1]$ 时, $g(x)_{\max} = f(x)_{\max} = f(1) = 1 - 2a$.

(2) 当 $0 < \frac{a}{2} \leq 1$, 即 $0 < a \leq 2$ 时, $f(0) = -a < 0$,

所以 $g(x)_{\max} = \max\{g(\frac{a}{2}), g(1)\} = \max\{\frac{a^2}{4} + a, |1 - 2a|\}$.

(i) 当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $g(x)_{\max} = \max\{\frac{a^2}{4} + a, 1 - 2a\}$.

① 当 $0 < a \leq -6 + 2\sqrt{10}$ 时, $\frac{a^2}{4} + a \leq 1 - 2a$, 所以 $g_{\max}(x) = 1 - 2a$;

② 当 $-6 + 2\sqrt{10} < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $\frac{a^2}{4} + a > 1 - 2a$, 所以 $g_{\max}(x) = \frac{a^2}{4} + a$;

(ii) 当 $\frac{1}{2} < a \leq 2$ 时, $g(x)$ 在区间 $(0, \frac{a}{2})$ 上递增, 在区间 $(\frac{a}{2}, 1)$ 上递减,

所以 $g_{\max}(x) = g(\frac{a}{2}) = \frac{a^2}{4} + a$;

(3) 当 $\frac{a}{2} > 1$, 即 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上递减, 且 $f(0) = -a < 0$,

所以 $g(x)_{\max} = g(1) = 2a - 1$;

综上所述, $M(a) = \begin{cases} 1 - 2a & a \leq -6 + 2\sqrt{10} \\ \frac{a^2}{4} + a & -6 + 2\sqrt{10} < a \leq 2 \\ 2a - 1 & a \geq 2 \end{cases}$, 由题意知 $k \leq M(a)_{\min}$.

当 $a \leq -6 + 2\sqrt{10}$ 时, $M(a)$ 为减函数, 所以 $M(a)_{\min} = M(-6 + 2\sqrt{10}) = 13 - 4\sqrt{10}$;

当 $-6+2\sqrt{10} < a \leq 2$ 时, $M(a)$ 为增函数, 所以 $M(a)_{\min} = M(-6+2\sqrt{10}) = 13-4\sqrt{10}$;

当 $a \geq 2$ 时, $M(a) = 2a-1$ 为增函数, 所以 $M(a)$ 的最小值为 $M(2) = 3$.

综上所述, $M(a)$ 的最小值为 $13-4\sqrt{10}$, 即 $k \in (-\infty, 13-4\sqrt{10}]$10 分